CHAPITRE 1

Fonctions de plusieurs variables : continuité

1. Introduction, motivation

Voir les notes manuscrites. Elles seront bientôt incluses dans ce texte.

2. Graphes et variétés de niveau

Soit $D \subset \mathbf{R}^n$ un sous ensemble de $\mathbf{R}^n$ et

$$f : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbf{R} \\ \vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) & \to & f(x_1, \cdots x_n) \end{array}$$

une fonction sur D à valeurs réelles. L'ensemble D (noté aussi D_f) est le *domaine de définition* de f.

Pour essayer de représenter f on associe à des sous-ensembles de $\mathbf{R}^{n+1}$ et $\mathbf{R}^n$ appellés le graphe et les variétés de niveau de f

2.1. Graphe d'une fonction.

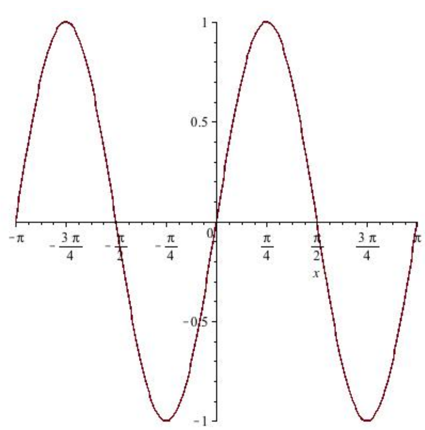

FIGURE 1. Graphe de $f(x) = \sin(2x)$

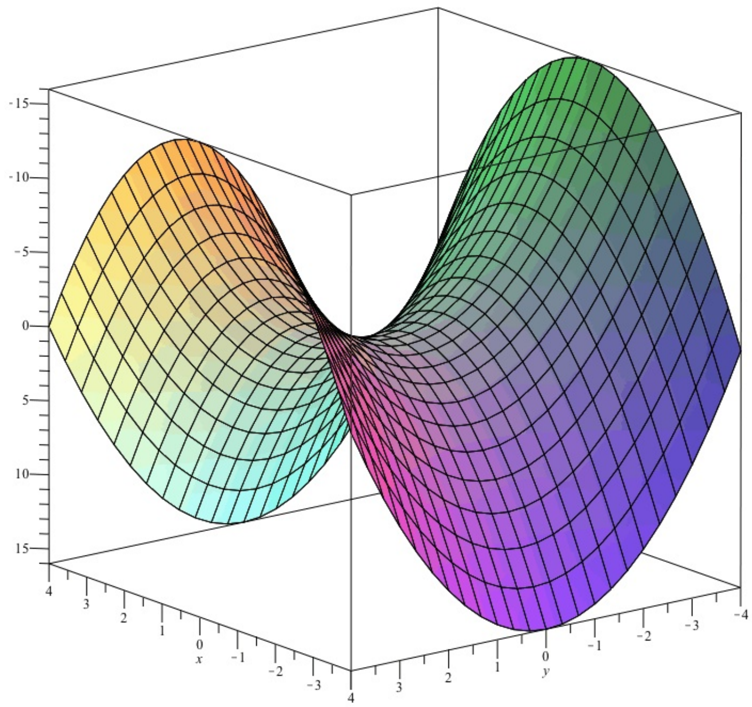

FIGURE 2. Graphe de $f(x, y) = x^2 - y^2$

DÉFINITION 1.1. *Le graphe de f noté $\mathcal{G}_f$ est le sous-ensemble de* $\mathbf{R}^{n+1}$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_f &= \{(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}),\ (x_1, \cdots, x_n) \in D_f,\ x_{n+1} = f(x_1, \cdots, x_n)\} \\ &= \{(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n)),\ (x_1, \cdots, x_n) \in D_f\} \subset \mathbf{R}^{n+1}\end{aligned}$$

– Si $n = 1$, $\mathcal{G}_f \subset \mathbf{R}^2$ n'est autre que le graphe habituel d'une fonction d'une variable.
– Si $n = 2$ et qu'on represente les coordonnés de $\mathbf{R}^3$ par (x, y, z), le graphe de $f : (x, y) \to f(x, y)$ est l'ensemble des points de la forme

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y, f(x, y)),\ (x, y) \in D_f\} \subset \mathbf{R}^3.$$

Graphiquement il s'agit d'un surface qui quand on la projette sur le plat horizontal (des (x, y)) redonne le domaine de définition D_f.
– Pour $n \geqslant 3$ le graphe de f est un objet de $\mathbf{R}^{n+1}$ qui est difficile de representer sur un tableau ou un ecran.

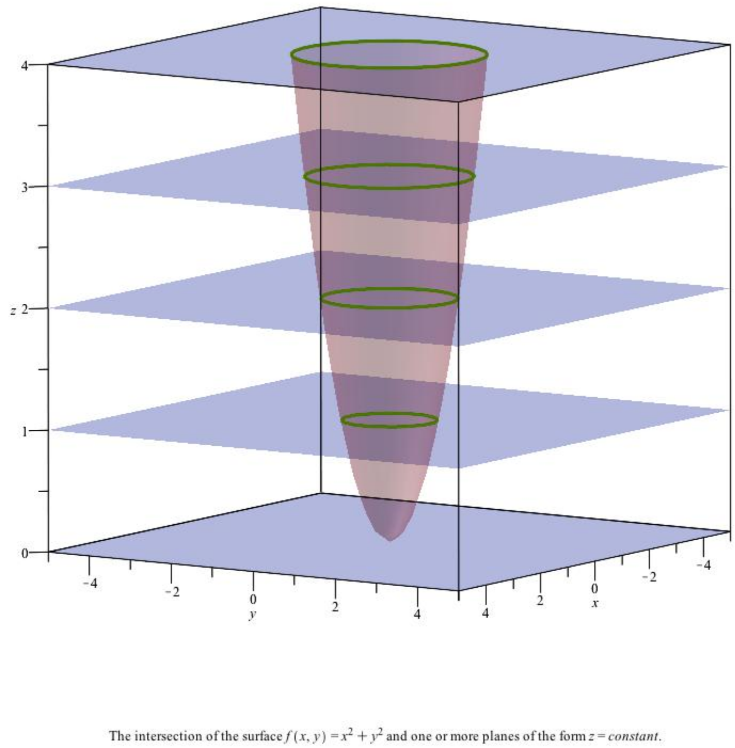

FIGURE 3. Courbes de niveau de $f(x, y) = x^2 + y^2$

2.2. Variétés de niveau. Une autre manière d'appréhender une fonction est de considérer ses varités de niveau qui sont cette fois des sous-ensemble de $\mathbf{R}$ (donc plus faciles à représenter).

DÉFINITION 1.2. *Soit $f : D_f \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction et C une constante, la variété de niveau C est le sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$*

$$V_f(C) = \{\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n),\ t.q.\ f(x_1, \cdots, x_n) = C\}.$$

Notons que variété de niveau peut être vide : si C n'appartient pas a l'image de f, $f(D_f)$.

3. Approximation et continuité

Dans ce cours on va chercher à décrire une fonction $\vec{x} \to f(\vec{x})$ quand la variable $\vec{x}$ est "proche" d'un point $\vec{x}_0 = (x_{0,1}, \cdots, x_{0,n})$. On va montrer que souvent dans ce cas f est "proche" d'une fonction g qui est une somme de fonctions "simples" à étudier.

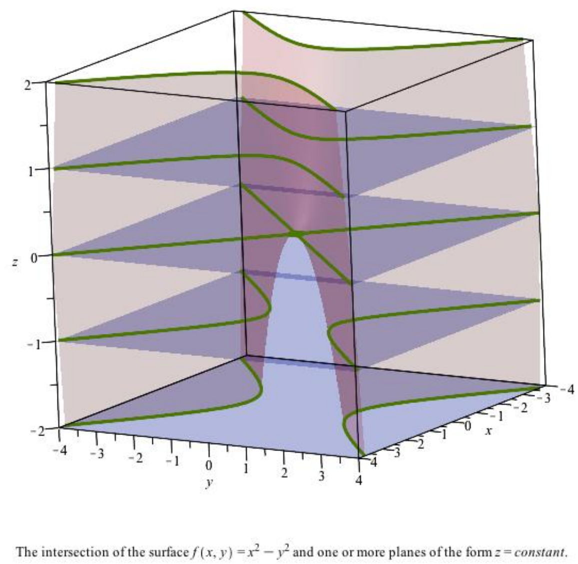

FIGURE 4. Courbes de niveau de $f(x,y) = x^2 - y^2$

3.1. Fonctions de base. Les fonctions simples qu'on va rencontrer sont essentiellement de trois types

(1) Les fonctions constantes, $f : \vec{x} \to Cst$ où Cst est une constante (ie. qui ne dépend pas de $\vec{x}$).

(2) Les fonctions linéaires ; une fonction f est linéaire si elle est de la forme

$$L : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto a_1x_1 + \cdots a_nx_n$$

avec $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ un vecteur fixe. Les fonctions linéaires satisfont
- $L(\vec{0}) = 0$,
- $L(\vec{x} + \vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y})$,
- $L(\lambda.\vec{x}) = \lambda L(\vec{x})$.

(3) Les fonctions homogènes quadratiques : les fonctions de la forme

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

avec $a_{ij},\ i = 1..n, j = 1..n$ des nombres réels fixes.

La somme d'un fonction constante et d'une fonction linéaire sera appelée une fonction *affine* et la somme d'une fonction affine et d'une fonction homogène quadratique sera appelée fonction quadratique ou fonction polynomiale de degré 2.

On doit aussi quantifier la notion d'être "proche". Pour cela on introduit la notion de

3.2. Normes sur $\mathbf{R}^n$. Soit x et x_0 deux nombres réels ; ils sont "proches" si leur distance

$$|x - x_0|$$

est petite.

Soient maintenant deux vecteurs

$$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n),\ \vec{x}_0 = (x_{0,1}, \cdots, x_{0,n}) \in \mathbf{R}^n.$$

On dira que deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{x}_0$ sont proches si chacune des coordonnées de l'un est proche de la coordonnée correspondante : x_1 est proche de $x_{0,1}$,..., x_n est proche de $x_{0,n}$, ou encore posant

$$\vec{x} - \vec{x}_0 = (x_1 - x_{0,1}, \cdots, x_n - x_{0,n}) = \vec{h} = (h_1, \cdots, h_n),$$

si chacune des coordonnées h_i est petite. On mesure la taille d'un vecteur par une *norme* : des exemples de normes sont

(1) La norme euclidienne : $\|\vec{h}\|_2 = (h_1^2 + \cdots + h_n^2)^{1/2}$,
(2) La norme L_1 :$\|\vec{h}\|_1 = |h_1| + \cdots + |h_n|$,
(3) La norme sup : $\|\vec{h}\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} |h_i|$.

Il est clair que si $\|\vec{h}\|_1$ ou $\|\vec{h}\|_2$ ou $\|\vec{h}\|_\infty$ est petit alors chacune des coordonnées de $\vec{h}$ est petite. On a en effet

$$\|\vec{h}\|_\infty \leqslant \|\vec{h}\|_2 \leqslant \|\vec{h}\|_1 \leqslant n\|\vec{h}\|_\infty.$$

Il y a beaucoup d'autres normes possibles, mais toutes ont des propriétés communes :

Définition 1.3. *Une norme sur $\mathbf{R}^n$ est une fonction*

$$\|\cdot\| : \vec{x} \in \mathbf{R}^n \mapsto \|\vec{x}\| \in \mathbf{R}$$

vérifiant les propriétés suivantes

(1) *(positivité) Pour tout $\vec{x}$, $\|\vec{x}\| \geqslant 0$*
(2) *(détection du vecteur nul) $\|\vec{x}\| = 0$ si et seulement si $\vec{x} = \vec{0}$,*
(3) *(homogénéité) $\|\lambda.\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$.*
(4) *(inégalité triangulaire) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.*

3.3. Continuité. On rappelle que

Définition 1.4. *Une fonction $f : D_f \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ d'une variable définie sur un domaine $D_f \subset \mathbf{R}$ est continue en un point $x_0 \in D_f$ si, quand x tend vers x_0, $f(x)$ tend vers $f(x_0)$; c'est á dire, si étant donné une suite numérique $(x_k)_k$ qui tend vers x_0, la suite numérique $(f(x_k))_k$ tend vers $f(x_0)$.*

On note cela

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),\ \textit{ou}\ f(x) \to f(x_0)\ \textit{quand}\ x \to x_0.$$

On va étendre cette définition aux fonctions de plusieurs variables. Pour cela nous auront besoin de la notion de convergence d'une suite de vecteurs.

DÉFINITION 1.5. *Une suite de vecteurs*

$$(\vec{x}_k)_k = (x_{k,1}, \cdots, x_{k,n})_k$$

tend vers un vecteur $\vec{x}_0 = (x_{0,1}, \cdots, x_{0,n})$ *et on le note*

$$\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0, \ ou \ \vec{x}_k \to \vec{x}_0, \ k \to +\infty,$$

si pour une (ou de manière équivalente pour toute) norme, la suite numérique

$$(\|\vec{x}_k - \vec{x}_0\|)_k$$

tend vers 0*. En considérant la norme*

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{i=1\cdots n} |x_i|$$

on voit que la suite $(\vec{x}_k)_k$ *tend vers* $\vec{x}_0$ *si et seulement si*

$$pour \ tout \ i = 1\cdots, n, \ on \ a \ x_{k,i} \to x_{0,i}, \ k \to +\infty.$$

DÉFINITION 1.6. *Soit* $f : D_f \in \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ *une fonction,* $\vec{x}_0 \in D_f$ *et* $l \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*. On dit que* f *tend vers* l *quand* $\vec{x}$ *tend vers* $\vec{x}_0$*, que l'on note*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = l \ ou \ bien \ encore \ f(\vec{x}) \to l, \ \vec{x} \to \vec{x}_0,$$

si pour tout suite $(\vec{x}_k)_k$ *de vecteurs de* D_f *qui tend vers* $\vec{x}_0$*, la suite numérique* $(f(\vec{x}_k))_k$ *tend vers* l*.*

On répète alors la définition de la continuité :

DÉFINITION 1.7. *Une fonction* $f : D_f \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *de* n *variables définie sur un domaine* $D_f \subset \mathbf{R}^n$ *est continue en un point* $\vec{x}_0 \in D_f$ *si, quand* $\vec{x}$ *tend vers* $\vec{x}_0$*,* $f(\vec{x})$ *tend vers* $f(\vec{x}_0)$ *; c'est á dire, si pour tout suite de vecteurs* $(\vec{x}_k)_k$ *tendant vers* $\vec{x}_0$*, la suite numérique* $(f(\vec{x}_k))_k$ *tend vers* $f(\vec{x}_0)$*.*

On note cela

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0), \ ou \ f(\vec{x}) \to f(\vec{x}_0) \ quand \ \vec{x} \to \vec{x}_0.$$

Si une fonction f *est continue en tout point* $\vec{x}_0$ *du domaine* D_f *on dira que* f *est continue sur* D_f*.*

3.4. Approximation de fonctions continues par des fonctions constantes. On va donner une définition eq́uivalente de la continuité en terme d'approximation par des fonctions constantes. Pour cela on introduit la notation suivante :

NOTATION. *Dans tout ce cours, on notera* $\varepsilon(\vec{h})$ *une fonction sur* $\mathbf{R}^n$ *bien dfinie pour tout* $\vec{h}$ *suffisament proche du vecteur nul* $\vec{0}$ *qui tend vers* 0 *quand* $\vec{h}$ *tend vers* $\vec{0}$ *:*

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \varepsilon(\vec{h}) = 0 \ ou \ bien \ \varepsilon(\vec{h}) \to 0, \ \vec{h} \to \vec{0}.$$

On a alors la définition équivalente suivante de la continuité :

Définition 1.8. *Une fonction $f : D_f \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de n variables définie sur un domaine $D_f \subset \mathbf{R}^n$ est continue en un point $\vec{x}_0 \in D_f$ si elle peut s'ecrire sous la forme*

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \varepsilon(\vec{x} - \vec{x}_0) \text{ avec } \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \varepsilon(\vec{h}) = 0; \tag{3.1}$$

ou encore (en posant $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0$) si on a

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \varepsilon(\vec{h}) \text{ avec } \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \varepsilon(\vec{h}) = 0. \tag{3.2}$$

Si une fonction f est continue en tout point $\vec{x}_0$ du domaine D_f on dira que f est continue sur D_f (la fonction $\varepsilon(\vec{h})$ de l'écriture précédente) dépend bien sûr du point $\vec{x}_0$).

Les expressions (3.1) et (3.2) expriment que quand $\vec{x}$ est proche du point de référence $\vec{x}_0$ la fonction $f(\vec{x})$ est approximable par la fonction constante $f(\vec{x}_0)$.

3.5. Le mécano de la continuité. On va voir qu'il est très facile de fabriquer des fonctions continues :

Théorème 1.1. *On a les critères de continuité suivants :*
- *Les fonctions constantes sont continues*
- *Pour $i = 1, ..., n$ les fonctions coordonnées*

$$x_i : \vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mapsto x_i$$

  sont continues en tout point de $\mathbf{R}^n$.
- *Si f et g sont continues en $\vec{x}_0$ alors $f + g : \vec{x} \to f(\vec{x}) + g(\vec{x})$ est continue en $\vec{x}_0$.*
- *Si f et g sont continues en $\vec{x}_0$ alors $f.g : \vec{x} \to f(\vec{x})g(\vec{x})$ est continue en $\vec{x}_0$.*
- *Si f et g sont continues en $\vec{x}_0$ alors $f/g : \vec{x} \to f(\vec{x})/g(\vec{x})$ est continue en $\vec{x}_0$ si $g(\vec{x}_0) \neq 0$.*
- *Si f est continue en $\vec{x}_0$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction d'une variable qui est définie et continue au point $f(\vec{x}_0)$ alors la fonction composée*

$$g \circ f : \vec{x} \mapsto g(f(\vec{x}))$$

  est continue en $\vec{x}_0$.

Exemple 3.5.1. La fonction

$$f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \frac{\sin(xy) + x^2 y}{1 + x^2 + y^2}$$

est continue sur $\mathbf{R}^2$. En effet le numérateur de f est somme d'un produit de fonctions continues et de la composée d'une fonction continue ($(x, y) \to xy$) sur $\mathbf{R}^2$et d'une fonction d'une variable également continue sur $\mathbf{R}$ (sin) ; sont dénominateur est continu et ne s'annule jamias sur $\mathbf{R}^2$ (car $x^2 + y^2 + 1 \geqslant 1$).

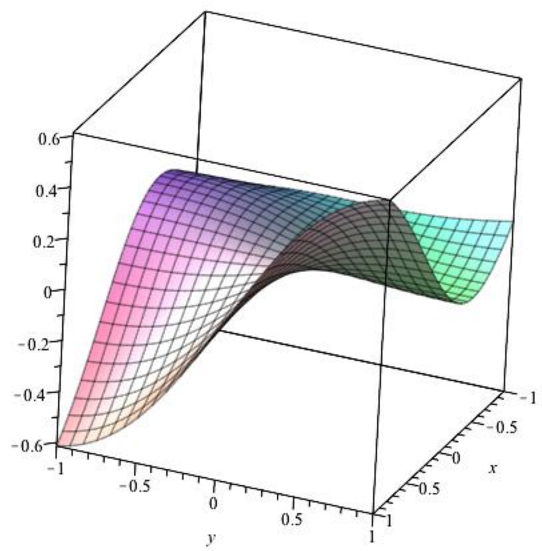

FIGURE 5. graphe de $f(x,y) = \frac{\sin(xy)+x^2y}{x^2+y^2+1}$

EXEMPLE 3.5.2. En revanche la fonction définie par

$$f : (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(xy)+x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est continue sur $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ (par le même raisonnement que dans l'exemple précédent) mais PAS en $(0,0)$. Il suffit pour cela de montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0) = 0.$$

Considérons pour cela la suite

$$\vec{x}_n = (x_n, y_n) = (1/n, 1/n).$$

cette suite tend vers $(0,0)$ mais

$$f(x_n, x_n) = \frac{\sin(1/n^2) + 1/n^3}{2/n^2} = \frac{\sin(1/n^2)}{2/n^2} + \frac{1}{2n}.$$

Le second terme tend vers 0 quand $n \to +\infty$ alors que le premier a pour limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n^2)}{2/n^2} = \lim_{X\to 0} \frac{\sin(X)}{2X} = \frac{1}{2}.$$

Et donc

$$\lim_{n\to\infty} f(1/n, 1/n) = 1/2 \neq 0.$$

Ntons que si $f(0,0)$ avait été défini comme étant $1/2$ (au lieu de 0) one aurait encore une fonction non-continue. Il suffirait de considérer la suite

$$\vec{x}'_n = (x_n, y_n) = (1/n, 0)$$

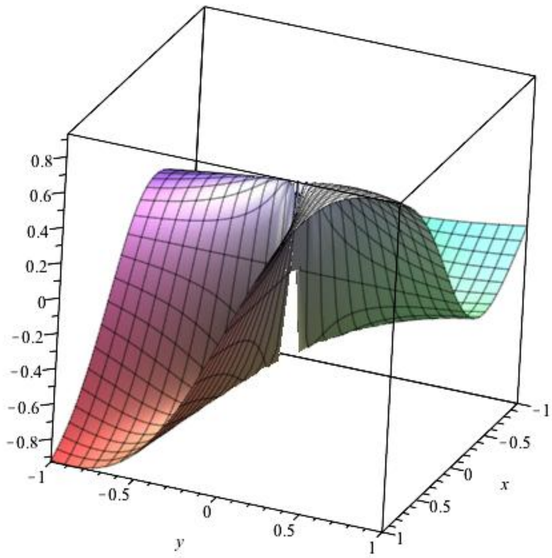

FIGURE 6. graphe de $f(x,y) = \frac{\sin(xy)+x^2y}{x^2+y^2}$

car alors

$$\lim_{n\to\infty} f(0,1/n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(0)+0}{0+(1/n)^2} = 0 \neq 1/2.$$