http://wiki.epfl.ch/mathgeo2

GSE Mathématiques II

Partie I : Fonctions de plusieurs variables

L'objectif général du cours de mathématiques au GSE est d'introduire les outils mathématiques qui permettent de décrire de manière précise et efficace le comportement de systèmes physiques

Par exemple la théorie des fonctions d'une variable (Mathématique I) permet de décrire l'évolution en fonction du temps d'un quantité associée à un tel système

Par exemple la fonction

$$t \longrightarrow z(t) = z_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

décrit l'altitude d'un corps* soumis à l'attraction terreste ($g = 9{,}81\, m/s^{-2}$) au temps t lâché d'une hauteur z_0.

* ponctuel(!)

Bien entendu la détermination de l'état d'un système physique peut nécessité de connaitre plusieurs paramètres en fonction du temps : si on

Exemple : si on lance le corps considéré précedement dans une certaine direction et à une certaine vitesse, l'objet devra être repéré par ses 3 coordonnées dans l'espace

$$x(t) = x_0 + v_{x_0} \cdot t$$
$$y(t) = y_0 + v_{y_0} \cdot t$$
$$z(t) = z_0 + v_{z_0} t - \frac{1}{2} g t^2$$

où $\vec{v} = (v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$ décrit le vecteur vitesse initiale

la fonction $t \longrightarrow (x(t), y(t), z(t))$ est la trajectoire du corps ainsi on peut se dire qu'il est possible de décrire l'évolution d'un système physique en "superposant" différentes fonctions d'une variable réelles. Cependant un système physique général est souvent beaucoup plus complexe et dependent de nombreux paramètre qui agissent entre eux de manière compliquée.

Ainsi l'accélération gravitationnelle (la constante g) n'est constante qu'en première approximation : sa valeur absolue (le g) voire sa direction dependent du point (x, y, z) ou l'on se trouve

ainsi les équations du mouvement qui decrivent la trajectoire d'un corps lancée avec une vitesse initialle peuvent dépendre d'une fonction de 3 variables

$$(x, y, z) \longrightarrow g(x, y, z)$$

Ainsi il est important de savoir étudier les variations d'une fonction de plusieurs variables sur un espace à plusieurs paramètres

D'autre part, considérons le problème précédent sous l'angle de la mécanique Lagrangienne :

On repère un point par ses coordonnées $\vec{x} = (x, y, z)$ et sa vitesse $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$

Soit un vecteur dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$

le principe de conservation de l'énergie dit que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle reste constante :

si m est la masse du corps on a pour tout t

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz = Cst$$
$$= \frac{1}{2} m (v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2 + v_{z_0}^2) + mgz_0$$

en effet $(\vec{x}(t), \vec{v}(t)) = (x_0 + v_{x_0} t, y_0 + v_{y_0} t, z_0 + v_{z_0} t - \frac{1}{2} g t^2, v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0} - gt)$

et on retrouve bien l'égalité pour tout temps t.

Ainsi le point $P(t) = (x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ dans l'espace $\mathbb{R}^6$ reste confiné dans le domaine des vecteurs dont les coordonnées vérifient

$$\frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz = C_{st}$$

C_{st} étant la valeur du terme de gauche pour $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) = (v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}, x_0, y_0, z_0)$

Plus généralement si la gravitation en un point (x,y,z) et définie par un vecteur

$$\vec{g}(x,y,z) = (g_1(x,y,z), g_2(x,y,z), g_3(x,y,z))$$

(au lieu du vecteur constant $(0, 0, -g)$

tout corps $P(t)$ repéré par ses coordonnées

$(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$

sera toujours contenu dans le ~~domaine~~ sous-ensemble de $\mathbb{R}^6$ défini par

$$\frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - m(g_1(x,y,z)x + g_2(x,y,z)y + g_3(x,y,z)z)$$

$= C_{st} =$ valeur en $(x_0, y_0, z_0, v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$

Dans ce cours, on va donner des éléments permettant d'étudier de tels sous-ensembles des espaces de paramètres $\mathbb{R}^n$

<u>Def</u>: Un espace de paramètres est un produit de copies de $\mathbb{R}$

$$\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{n \text{ fois}} = \mathbb{R}^n.$$

Un point de cet espace (ou vecteur) est repéré par ses coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ x_i dans $\mathbb{R}$

On utilisera souvent une notation vectorielle

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Rappelons qu'on a certaines operations sur les vecteurs

- somme : $\vec{x}+\vec{x}' = (x_1, \; x_n)+(x'_1, \; , x'_n) = (x_1+x'_1, \dots, x_n+x'_n)$
- multiplication par un scalaire (homothétie) :
si λ est dans $\mathbb{R}$
$$\lambda.\vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \text{ dans } \mathbb{R}^n$$
- produit scalaire
$$\vec{x}.\vec{x}' = \sum_{i=1} x_i x'_i = x_1 x'_1 + \dots + x_n x'_n \text{ est un réel}$$
Notons que $\vec{x}.\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ est le carré de la longueur euclidienne du vecteur $\vec{x}$.

<u>Def</u>: Une fonction réelle (ou bien à valeurs réelles) f est une application qui à tout point d'un sous-ensemble $D(f)$ de $\mathbb{R}^n$ associe une valeur réelle $(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow f(x_1, \dots, x_n)$

$D(f)$ est appelé <u>domaine de définition</u> de f.

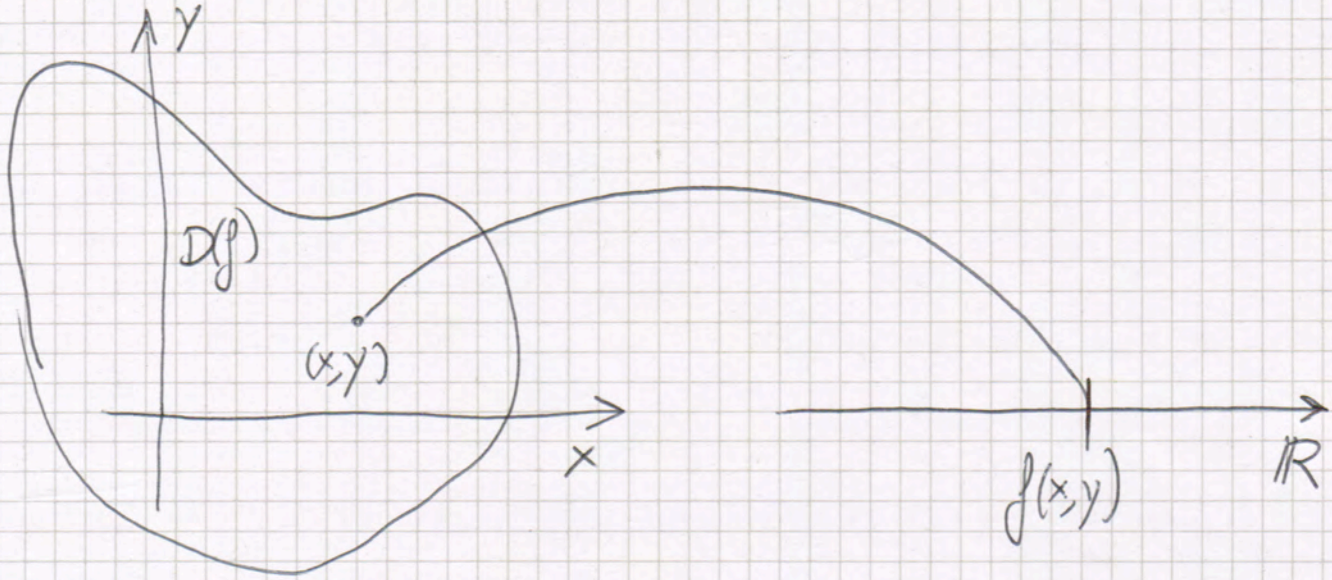
Notations : On dit aussi que f est une fonction de n variables.

$$f: D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow f(x_1, \dots, x_n)$$

On va considérer spécialement les cas $n=2$ et $n=3$ et on emploiera souvent les notations suivantes pour les coordonnées

$(x,y) \longrightarrow f(x,y)$ au lieu de $(x_1,x_2) \longrightarrow f(x_1,x_2)$

$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z)$ $\qquad (x_1,x_2,x_3) \longrightarrow f(x_1,x_2,x_3)$



Exemples ① $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longrightarrow \sqrt{x^2+y^2}$ (la longueur du vecteur (x,y))

② $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longrightarrow 1$ $\qquad$ fonction constante égale à 1

③ $f : \mathbb{R}^3-\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z) \longrightarrow \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ $\qquad D(f) = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$

$\cancel{④ \; f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{x_1x_2x_3x_4} \quad D(f) = \mathbb{R}^4 - \{(0}$

On peut "superposer" plusieurs fonctions de n variables

$f = (f_1, \dots, f_m)$

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (f_1(x_1, \dots x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

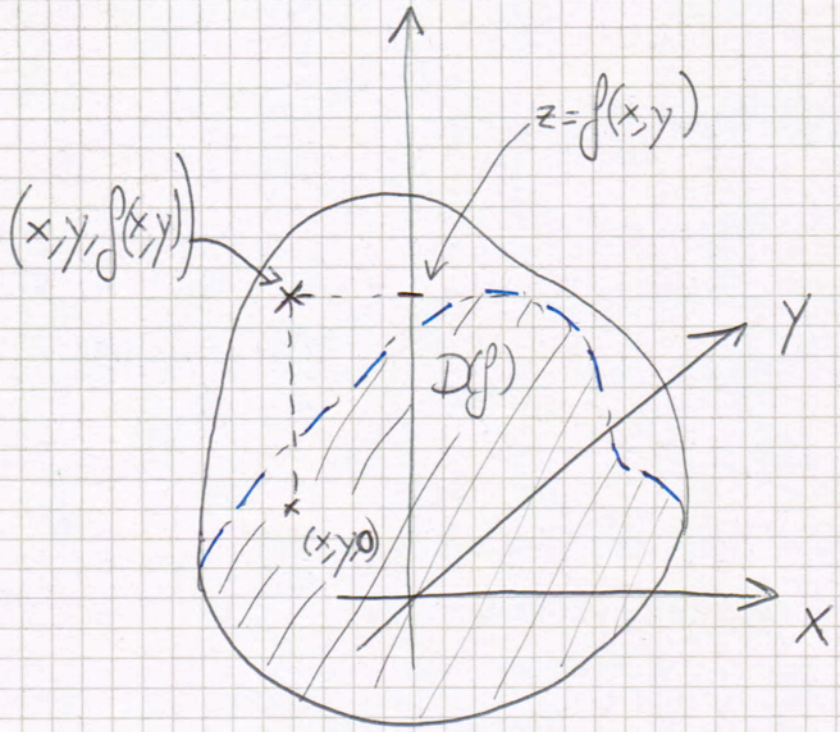
On parle alors de fonction en n variables à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

Le graphe d'une fonction de plusieurs variables

Déf: Soit $f(x_1, \dots, x_n)$ ~~le graphe~~ d'une fonction ~~de n var~~ de n variables. Le graphe de f est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^{n+1}$ de la forme

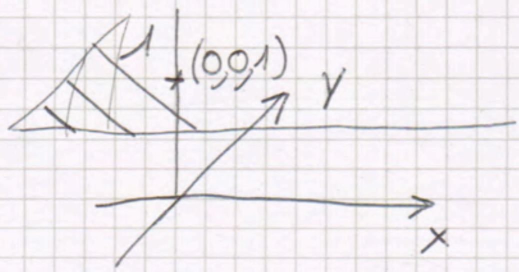
$(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n) = x_{n+1})$ avec $(x_1, \dots, x_n)$ dans $D(f)$

Exemple : Si f est une fonction de 2 variables



Exemples : $f(x,y)=1$

le graphe est un plan

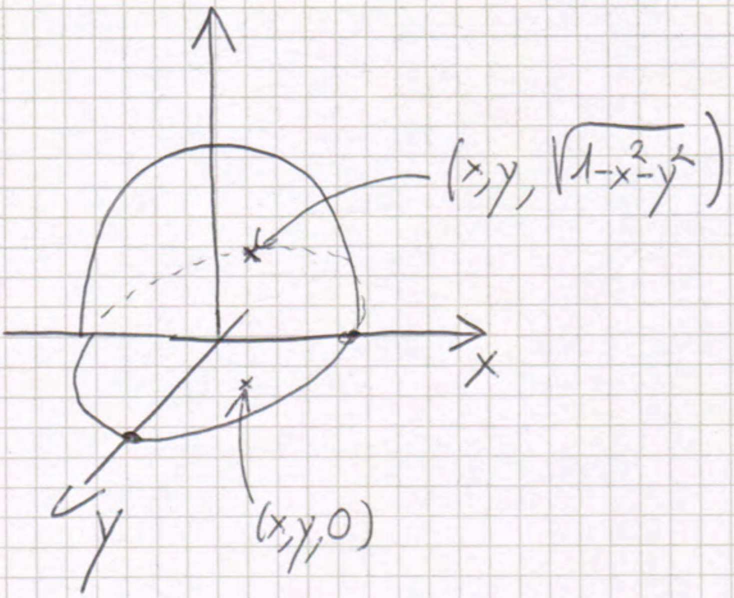


$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2} \qquad D(f)=\{(x,y) \quad x^2+y^2\leq 1\}$$

$D(f)$ est le disque centré en $(0,0)$ et de rayon 1

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \iff x^2+y^2+z^2=1 \text{ et } z\geq 0$$

Le graphe de f est donc la demi-sphère ("l'hémisphère nord")



~~Courbes~~ Variétés de niveau

Soit f une fonction de n variables définie sur un domaine $D(f)$. Les ~~courbes~~ variétés de niveau de f sont les sous-ensembles de $D(f)$ le long desquelles f reste constante.

~~Une variété de niveau~~

Soit C une constante, la variété de niveau C est l'ensemble des points $(x_1, \ldots, x_n)$ de $D(f)$ qui sont liés par la relation $f(x_1, \ldots, x_n) = C$

Notons qu'une variété de niveau peut être vide : il suffit que C ne soit pas une valeur prise par f

<u>Exemple</u> : $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

la variété de niveau C est vide si $C<0$
est le point $(0,0,0)$ si $C=0$
" la sphère de rayon $\sqrt{C}$ si $C>0$

Remarque : très souvent, et au moins si l'on se restreint à des sous-ensembles de $D(f)$ il est possible en utilisant la relation

$$f(x_1,\dots,x_n)=C$$

d'exprimer un des paramètres $x_1,\dots,x_n$ en fonction des autres. Ainsi une variété de niveau peu être vue (au moins sur un sous-ensemble de $D(f)$) comme le <u>graphe</u> d'une fonction en $n-1$ variables. Elle est donc plus facile à représenter

Les variétés de niveau permettent de se représenter une surface

Exemple : $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$C>0$ si on se restreint à $z>0$ on a
$z = \sqrt{C-(x^2+y^2)}$ qui est définie pour $x^2+y^2 \leq C$

Vocabulaire : Si f est une fonction en 2 variables on parle de courbe de niveau car la variété de niveau est souvent une courbe

Si f est une fonction en 3 variables on parle de surface de niveau

Exemple : Considérons l'espace à 6 paramètres $\mathbb{R}^6$
$(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ $\quad m>0$

$$E(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + mgz$$

alors un corps ponctuel de masse m soumis à l'attraction terreste repéré par sa position $(x(t),y(t),z(t))$ et sa vitesse $(\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t))$ évolue toujours le long d'une variété de niveau
$$E(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = E(x(0),y(0),z(0),\dot{x}(0),\dot{y}(0),\dot{z}(0))$$

CHAPITRE 1

Fonctions de plusieurs variables : continuité

1. Introduction, motivation

Voir les notes manuscrites. Elles seront bientôt incluses dans ce texte.

2. Graphes et variétés de niveau

Soit $D \subset \mathbf{R}^n$ un sous ensemble de $\mathbf{R}^n$ et

$$f: \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbf{R} \\ \vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) & \to & f(x_1, \cdots x_n) \end{array}$$

une fonction sur D à valeurs réelles. L'ensemble D (noté aussi D_f) est le *domaine de définition* de f.

Pour essayer de représenter f on associe à des sous-ensembles de $\mathbf{R}^{n+1}$ et $\mathbf{R}^n$ appellés le graphe et les variétés de niveau de f

2.1. Graphe d'une fonction.

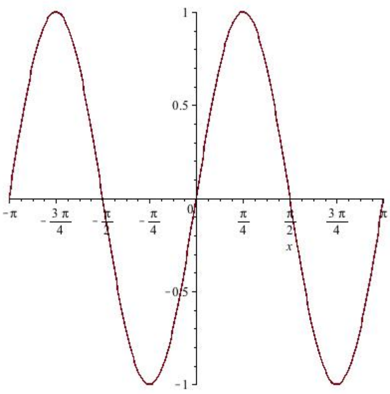


FIGURE 1. Graphe de $f(x) = \sin(2x)$

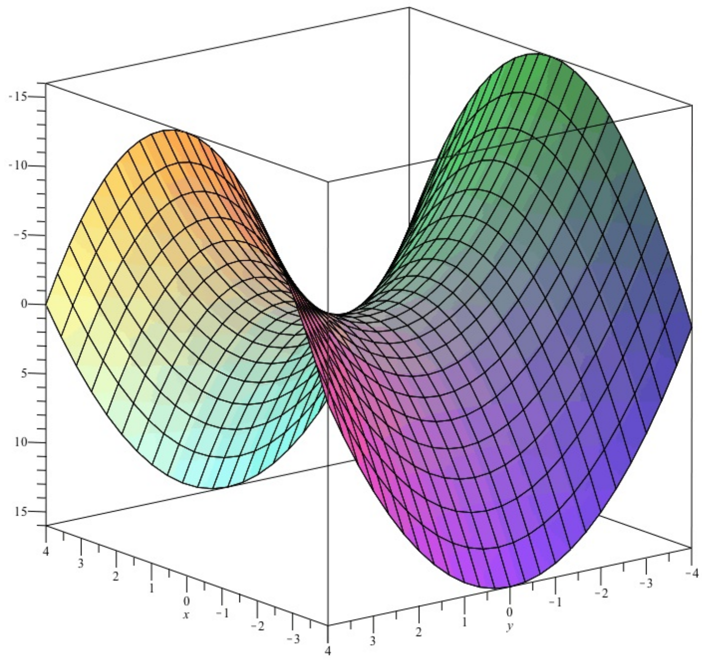


FIGURE 2. Graphe de $f(x, y) = x^2 - y^2$

DÉFINITION 1.1. *Le graphe de f noté $\mathcal{G}_f$ est le sous-ensemble de* $\mathbf{R}^{n+1}$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_f &= \{(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}),\ (x_1, \cdots, x_n) \in D_f,\ x_{n+1} = f(x_1, \cdots, x_n)\} \\ &= \{(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n)),\ (x_1, \cdots, x_n) \in D_f\} \subset \mathbf{R}^{n+1}\end{aligned}$$

– Si $n = 1$, $\mathcal{G}_f \subset \mathbf{R}^2$ n'est autre que le graphe habituel d'une fonction d'une variable.
– Si $n = 2$ et qu'on represente les coordonnés de $\mathbf{R}^3$ par (x, y, z), le graphe de $f : (x, y) \to f(x, y)$ est l'ensemble des points de la forme

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y, f(x, y)),\ (x, y) \in D_f\} \subset \mathbf{R}^3.$$

Graphiquement il s'agit d'un surface qui quand on la projette sur le plat horizontal (des (x, y)) redonne le domaine de définition D_f.
– Pour $n \geqslant 3$ le graphe de f est un objet de $\mathbf{R}^{n+1}$ qui est difficile de representer sur un tableau ou un ecran.

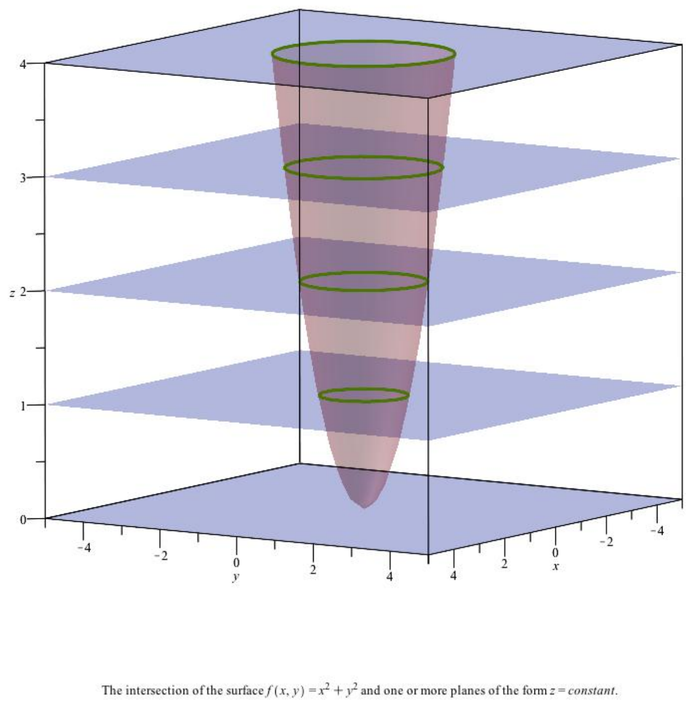


FIGURE 3. Courbes de niveau de $f(x, y) = x^2 + y^2$

2.2. Variétés de niveau. Une autre manière d'appréhender une fonction est de considérer ses varités de niveau qui sont cette fois des sous-ensemble de $\mathbf{R}$ (donc plus faciles à représenter).

DÉFINITION 1.2. *Soit $f : D_f \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction et C une constante, la variété de niveau C est le sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$*

$$V_f(C) = \{\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n),\ t.q.\ f(x_1, \cdots, x_n) = C\}.$$

Notons que variété de niveau peut être vide : si C n'appartient pas a l'image de f, $f(D_f)$.

3. Approximation et continuité

Dans ce cours on va chercher à décrire une fonction $\vec{x} \to f(\vec{x})$ quand la variable $\vec{x}$ est "proche" d'un point $\vec{x}_0 = (x_{0,1}, \cdots, x_{0,n})$. On va montrer que souvent dans ce cas f est "proche" d'une fonction g qui est une somme de fonctions "simples" à étudier.

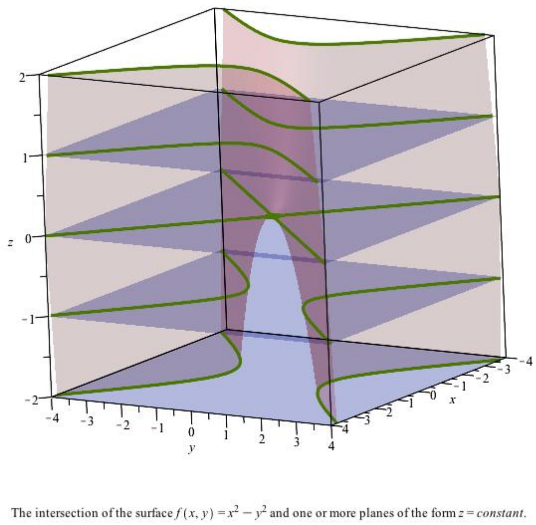


FIGURE 4. Courbes de niveau de $f(x, y) = x^2 - y^2$

3.1. Fonctions de base. Les fonctions simples qu'on va rencontrer sont essentiellement de trois types

(1) Les fonctions constantes, $f : \vec{x} \to Cst$ où Cst est une constante (ie. qui ne dépend pas de $\vec{x}$).

(2) Les fonctions linéaires ; une fonction f est linéaire si elle est de la forme

$$L : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \cdots a_n x_n$$

avec $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ un vecteur fixe. Les fonctions linéaires satisfont
- $L(\vec{0}) = 0$,
- $L(\vec{x} + \vec{x}') = L(\vec{x}) + L(\vec{x}')$,
- $L(\lambda.\vec{x}) = \lambda L(\vec{x})$.

(3) Les fonctions homogènes quadratiques : les fonctions de la forme

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \cdots + a_{nn} x_n^2$$

avec $a_{ij},\ i = 1..n, j = 1..n$ des nombres réels fixes.

La somme d'un fonction constante et d'une fonction linéaire sera appelée une fonction *affine* et la somme d'une fonction affine et d'une fonction homogène quadratique sera appelée fonction quadratique ou fonction polynomiale de degré 2.

On doit aussi quantifier la notion d'être "proche". Pour cela on introduit la notion de

3.2. Normes sur $\mathbf{R}^n$. Soit x et x_0 deux nombres réels ; ils sont "proches" si leur distance

$$|x - x_0|$$

est petite.

Soient maintenant deux vecteurs

$$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n),\ \vec{x}_0 = (x_{0,1}, \cdots, x_{0,n}) \in \mathbf{R}^n.$$

On dira que deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{x}_0$ sont proches si chacune des coordonnées de l'un est proche de la coordonnée correspondante : x_1 est proche de $x_{0,1}$,..., x_n est proche de $x_{0,n}$, ou encore posant

$$\vec{x} - \vec{x}_0 = (x_1 - x_{0,1}, \cdots, x_n - x_{0,n}) = \vec{h} = (h_1, \cdots, h_n),$$

si chacune des coordonnées h_i est petite. On mesure la taille d'un vecteur par une *norme* : des exemples de normes sont

(1) La norme euclidienne : $\|\vec{h}\|_2 = (h_1^2 + \cdots + h_n^2)^{1/2}$,
(2) La norme L_1 :$\|\vec{h}\|_1 = |h_1| + \cdots + |h_n|$,
(3) La norme sup : $\|\vec{h}\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} |h_i|$.

Il est clair que si $\|\vec{h}\|_1$ ou $\|\vec{h}\|_2$ ou $\|\vec{h}\|_\infty$ est petit alors chacune des coordonnées de $\vec{h}$ est petite. On a en effet

$$\|\vec{h}\|_\infty \leqslant \|\vec{h}\|_2 \leqslant \|\vec{h}\|_1 \leqslant n\|\vec{h}\|_\infty.$$

Il y a beaucoup d'autres normes possibles, mais toutes ont des propriétés communes :

Définition 1.3. *Une norme sur $\mathbf{R}^n$ est une fonction*

$$\|\cdot\| : \vec{x} \in \mathbf{R}^n \mapsto \|\vec{x}\| \in \mathbf{R}$$

vérifiant les propriétés suivantes

(1) *(positivité) Pour tout $\vec{x}$, $\|\vec{x}\| \geqslant 0$*
(2) *(détection du vecteur nul) $\|\vec{x}\| = 0$ si et seulement si $\vec{x} = \vec{0}$,*
(3) *(homogénéité) $\|\lambda.\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$.*
(4) *(inégalité triangulaire) $\|\vec{x} + \vec{x}'\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{x}'\|$.*

3.3. Continuité. On rappelle que

Définition 1.4. *Une fonction $f : D_f \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ d'une variable définie sur un domaine $D_f \subset \mathbf{R}$ est continue en un point $x_0 \in D_f$ si, quand x tend vers x_0, $f(x)$ tend vers $f(x_0)$; c'est á dire, si étant donné une suite numérique $(x_k)_k$ qui tend vers x_0, la suite numérique $(f(x_k))_k$ tend vers $f(x_0)$.*

On note cela

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),\ \textit{ou } f(x) \to f(x_0) \textit{ quand } x \to x_0.$$

On va étendre cette définition aux fonctions de plusieurs variables. Pour cela nous auront besoin de la notion de convergence d'une suite de vecteurs.

DÉFINITION 1.5. *Une suite de vecteurs*

$$(\vec{x}_k)_k = (x_{k,1}, \cdots, x_{k,n})_k$$

tend vers un vecteur $\vec{x}_0 = (x_{0,1}, \cdots, x_{0,n})$ *et on le note*

$$\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0, \text{ ou } \vec{x}_k \to \vec{x}_0, \ k \to +\infty,$$

si pour une (ou de manière équivalente pour toute) norme, la suite numérique

$$(\|\vec{x}_k - \vec{x}_0\|)_k$$

tend vers 0. *En considérant la norme*

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{i=1\cdots n} |x_i|$$

on voit que la suite $(\vec{x}_k)_k$ *tend vers* $\vec{x}_0$ *si et seulement si*

$$\text{pour tout } i = 1\cdots, n, \text{ on a } x_{k,i} \to x_{0,i}, \ k \to +\infty.$$

DÉFINITION 1.6. *Soit* $f : D_f \in \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ *une fonction,* $\vec{x}_0 \in D_f$ *et* $l \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. *On dit que* f *tend vers* l *quand* $\vec{x}$ *tend vers* $\vec{x}_0$, *que l'on note*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = l \text{ ou bien encore } f(\vec{x}) \to l, \ \vec{x} \to \vec{x}_0,$$

si pour tout suite $(\vec{x}_k)_k$ *de vecteurs de* D_f *qui tend vers* $\vec{x}_0$, *la suite numérique* $(f(\vec{x}_k))_k$ *tend vers* l.

On répète alors la définition de la continuité :

DÉFINITION 1.7. *Une fonction* $f : D_f \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *de* n *variables définie sur un domaine* $D_f \subset \mathbf{R}^n$ *est continue en un point* $\vec{x}_0 \in D_f$ *si, quand* $\vec{x}$ *tend vers* $\vec{x}_0$, $f(\vec{x})$ *tend vers* $f(\vec{x}_0)$ *; c'est á dire, si pour tout suite de vecteurs* $(\vec{x}_k)_k$ *tendant vers* $\vec{x}_0$, *la suite numérique* $(f(\vec{x}_k))_k$ *tend vers* $f(\vec{x}_0)$.

On note cela

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0), \text{ ou } f(\vec{x}) \to f(\vec{x}_0) \text{ quand } \vec{x} \to \vec{x}_0.$$

Si une fonction f *est continue en tout point* $\vec{x}_0$ *du domaine* D_f *on dira que* f *est continue sur* D_f.

3.4. Approximation de fonctions continues par des fonctions constantes. On va donner une définition eqúivalente de la continuité en terme d'approximation par des fonctions constantes. Pour cela on introduit la notation suivante :

NOTATION. *Dans tout ce cours, on notera* $\varepsilon(\vec{h})$ *une fonction sur* $\mathbf{R}^n$ *bien dfinie pour tout* $\vec{h}$ *suffisament proche du vecteur nul* $\vec{0}$ *qui tend vers* 0 *quand* $\vec{h}$ *tend vers* $\vec{0}$ *:*

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \varepsilon(\vec{h}) = 0 \text{ ou bien } \varepsilon(\vec{h}) \to 0, \ \vec{h} \to \vec{0}.$$

On a alors la définition équivalente suivante de la continuité :

DÉFINITION 1.8. *Une fonction $f : D_f \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de n variables définie sur un domaine $D_f \subset \mathbf{R}^n$ est continue en un point $\vec{x}_0 \in D_f$ si elle peut s'ecrire sous la forme*

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \varepsilon(\vec{x} - \vec{x}_0) \text{ avec } \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \varepsilon(\vec{h}) = 0; \tag{3.1}$$

ou encore (en posant $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0$) si on a

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \varepsilon(\vec{h}) \text{ avec } \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \varepsilon(\vec{h}) = 0. \tag{3.2}$$

Si une fonction f est continue en tout point $\vec{x}_0$ du domaine D_f on dira que f est continue sur D_f (la fonction $\varepsilon(\vec{h})$ de l'écriture précédente) dépend bien sûr du point $\vec{x}_0$).

Les expressions (3.1) et (3.2) expriment que quand $\vec{x}$ est proche du point de référence $\vec{x}_0$ la fonction $f(\vec{x})$ est approximable par la fonction constante $f(\vec{x}_0)$.

3.5. Le mécano de la continuité. On va voir qu'il est très facile de fabriquer des fonctions continues :

THÉORÈME 1.1. *On a les critères de continuité suivants :*
- *Les fonctions constantes sont continues*
- *Pour $i = 1, ..., n$ les fonctions coordonnées*

$$x_i : \vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mapsto x_i$$

  sont continues en tout point de $\mathbf{R}^n$.
- *Si f et g sont continues en $\vec{x}_0$ alors $f + g : \vec{x} \to f(\vec{x}) + g(\vec{x})$ est continue en $\vec{x}_0$.*
- *Si f et g sont continues en $\vec{x}_0$ alors $f.g : \vec{x} \to f(\vec{x})g(\vec{x})$ est continue en $\vec{x}_0$.*
- *Si f et g sont continues en $\vec{x}_0$ alors $f/g : \vec{x} \to f(\vec{x})/g(\vec{x})$ est continue en $\vec{x}_0$ si $g(\vec{x}_0) \neq 0$.*
- *Si f est continue en $\vec{x}_0$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction d'une variable qui est définie et continue au point $f(\vec{x}_0)$ alors la fonction composée*

$$g \circ f : \vec{x} \mapsto g(f(\vec{x}))$$

  est continue en $\vec{x}_0$.

EXEMPLE 3.5.1. La fonction

$$f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \frac{\sin(xy) + x^2 y}{1 + x^2 + y^2}$$

est continue sur $\mathbf{R}^2$. En effet le numérateur de f est somme d'un produit de fonctions continues et de la composée d'une fonction continue ($(x, y) \to xy$) sur $\mathbf{R}^2$et d'une fonction d'une variable également continue sur $\mathbf{R}$ (sin) ; sont dénominateur est continu et ne s'annule jamias sur $\mathbf{R}^2$ (car $x^2 + y^2 + 1 \geqslant 1$).

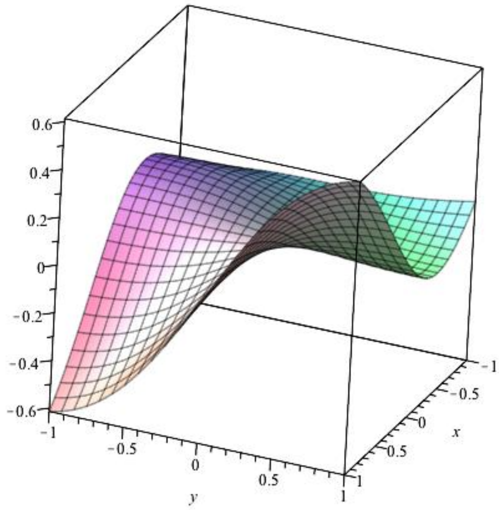


FIGURE 5. graphe de $f(x,y) = \frac{\sin(xy)+x^2y}{x^2+y^2+1}$

EXEMPLE 3.5.2. En revanche la fonction définie par

$$f : (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(xy)+x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est continue sur $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ (par le même raisonnement que dans l'exemple précédent) mais PAS en $(0,0)$. Il suffit pour cela de montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0) = 0.$$

Considérons pour cela la suite

$$\vec{x}_n = (x_n, y_n) = (1/n, 1/n).$$

cette suite tend vers $(0,0)$ mais

$$f(x_n, x_n) = \frac{\sin(1/n^2) + 1/n^3}{2/n^2} = \frac{\sin(1/n^2)}{2/n^2} + \frac{1}{2n}.$$

Le second terme tend vers 0 quand $n \to +\infty$ alors que le premier a pour limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n^2)}{2/n^2} = \lim_{X\to 0} \frac{\sin(X)}{2X} = \frac{1}{2}.$$

Et donc

$$\lim_{n\to\infty} f(1/n, 1/n) = 1/2 \neq 0.$$

Ntons que si $f(0,0)$ avait été défini comme étant $1/2$ (au lieu de 0) one aurait encore une fonction non-continue. Il suffirait de considérer la suite

$$\vec{x}'_n = (x_n, y_n) = (1/n, 0)$$

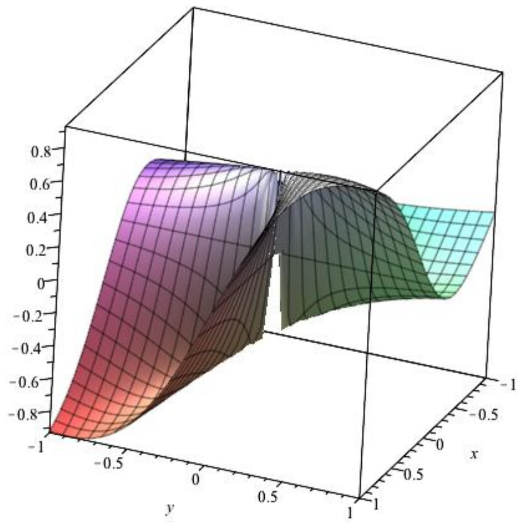


FIGURE 6. graphe de $f(x, y) = \frac{\sin(xy)+x^2y}{x^2+y^2}$

car alors

$$\lim_{n\to\infty} f(0, 1/n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(0) + 0}{0 + (1/n)^2} = 0 \neq 1/2.$$

CHAPITRE 2

Fonctions de plusieurs variables : Calcul différentiel

La condition de continuité pour une fonction de plusieurs variables est une notion de régularité pratique et naturelle mais elle est trop générale et recouvre un ensemble important de phénomémes trés différents. Dasn ce chapitre on va discuter une condition de régularité plus restreinte : la différentiabilité.

1. Différentiabilité

La différentiabilité généralise aux fonctions de plusieurs variables la notion dérivabilité pour les fonctions d'une variable. Cependant pour énoncer cette généralisation il est utile de reformuler la notion de dérivabilité de maniére adéquate.

1.1. Rappels sur la dérivabilité. Traditionellement, on dit qu'une fonction $f(x)$ d'une variable est dérivale en $x_0 \in \mathbf{R}$ si la limite du taux d'accroissement en x_0 existe : f est dérivable en x_0 si et seulement si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe ; on appelle alors cette limite *la dérivée* de f en x_0 et on la note $f'(x_0)$ On montre alors que si f est dérivable en x_0 alors elee est continue, ainsi la notion de dérivabilité est un notion de régularité plus forte que la continuité. Pour passer aux fonctions de plusieurs variables, il sera commode de formuler la dérivabiiltée sous une forme équivalente : l'expression

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \tag{1.1}$$

est équivalente[1] à l'identité

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0),$$

avec $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$. En particulier, cette formulation montre immédiatement que f est continue en x_0 ; elle s'intérpréte en disant que *quand x est proche de x_0 la fonction $f(x)$ est bien approximée par la fonction affine*

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

1. le vérifier !

Remarque 1.1. On a vu que la continuité (en x_0)

$$f(x) = f(x_0) + \varepsilon_1(x - x_0)\text{avec } \varepsilon_1(h) \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

s'interpréte en disant que *quand x est proche de x_0 $f(x)$ est approximée par la fonction constante $x \mapsto f(x_0)$*. La dérivabilité implique la continuité car la fonction

$$h \mapsto f'(x_0)h + h\varepsilon(h)$$

tend bien vers 0 quand h tend vers 0 cependant la dérivabilité dit plus car pour la continuité, l'erreur d'approximation par une fonction constante est simplement une fonction $\varepsilon_1(h)$ qui tend vers 0 en $h = 0$, alrs que pour la dérivabilité l'erreur d'approximation par une fonction affine est une fonction de la forme $h\varepsilon(h)$ qui tend vers 0 en $h = 0$ mais *a priori plus vite* puisque produit de deux fonction qui tendent vers 0 : $\varepsilon(h)$ et la fonction h. On parle pour la continuité d'approximation à l'ordre 0 et pour la dérivabilité d'approximation à l'ordre 1.

1.2. Définition de la différentiabilité.

1.2.1. *fonctions de deux variables.* On commence par le cas de deux variables qui est plus simple du point de vue des notations :

$$f : (x, y) \in D(f) \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

une fonction de deux variables et $(x_0, y_0) \in D(f)$ un point de reference.

Définition 2.1. *On dit que f est differentiable au point (x_0, y_0) si il existe deux nombres réels, $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$, une fonction $\varepsilon : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ vérifiant*

$$\varepsilon(u, v) \to 0 \text{ quand } (u, v) \to (0, 0)$$

et telle qu'on ait l'égalité ($\|.\|$ désigne une norme quelconque)

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + \|(x - x_0, y - y_0)\|\varepsilon(x - x_0, y - y_0).$$

Alternativement, posant

$$(u, v) = (x - x_0, y - y_0),$$

f est differentiable au point (x_0, y_0) si on a l'égalité

$$f(x_0 + u, y_0 + v) = f(x_0, y_0) + a_1u + a_2v + \|(u, v)\|\varepsilon(u, v).$$

On dit que la fonction $f(x, y)$ est différentiable sur $D(f) \subset \mathbf{R}^2$ si elle est différentiable en tout point (x_0, y_0) de $D(f)$.

Remarque 1.2. En d'autres terms une fonction est différentiable si quand (x, y) est proche de (x_0, y_0) la fonction est bien approximable par la fonction affine

$$(x, y) \mapsto f(x_0, y_0) + a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) = a_1u + a_2v$$

le term d'erreur de cette approximation étant de la forme $\|(x - x_0, y - y_0)\|\varepsilon(x - x_0, y - y_0) = \|(u, v)\|\varepsilon(u, v)$ qui tend "très vite" vers 0 puisque $\|(x - x_0, y - y_0)$ tend vers 0 et $\|\varepsilon(x - x_0, y - y_0)$ tend vers 0 : On parle d'approximation à l'ordre 1. Notons également que comme la fonction

$$(u, v) \mapsto a_1u + a_2v \to 0, \ (u, v) \to (0, 0)$$

on a

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \varepsilon_1(x-x_0, y-y_0),\ \ \varepsilon_1(u,v) = a_1u + a_2v + \|(u,v)\|\varepsilon(u,v);$$

la fonction f est donc continue en (x_0,y_0).

1.2.2. *Définition dans le cas général.* Dans le cas d'un fonction de plusieurs variables générale on répète la définition avec des notations différentes. Soit $n \geqslant 1$ et une fonction de n variables

$$f : \vec{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in D(f) \subset \mathbf{R}^n \mapsto f(\vec{x}) \in \mathbf{R}$$

DÉFINITION 2.2. *On dit que f est différentiable en $\vec{x}_0 = (x_{0,1},\ldots,x_{0,n}) \in D(f)$, si il existe $\vec{a} = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbf{R}^n$ et une fonction $\varepsilon(\vec{h})$ qui tend vers 0 quand $\vec{h} \to \vec{0}$ tel que on ait*

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + a_1(x_1 - x_{0,1}) + \cdots + a_n(x_n - x_{0,n}) + \|\vec{x}-\vec{x}_0\|\varepsilon(\vec{x}-\vec{x}_0). \tag{1.2}$$

De maniére équivalente en écrivant $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{h}$

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + a_1h_1 + \cdots + a_nh_n + \|\vec{h}\|\varepsilon(\vec{h}).$$

On voit que pour $n = 1$ cette définition n'est autre que celle de la dérivabilité avec $a_1 = f'(x_0)$.

De plus si f est différentiable en $\vec{x}_0$ alors elle est continue au même point : est effet, considéront la fonction

$$\varepsilon_1 : \vec{h} = (h_1,\ldots,h_n) \mapsto a_1h_1 + \cdots + a_nh_n + \|\vec{h}\|\varepsilon(\vec{h});$$

alors $\varepsilon_1(\vec{h})$ tend vers 0 quand $\vec{h} \to 0$ et on a $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \varepsilon_1(\vec{x}-\vec{x}_0)$.

1.2.3. *Notation sous forme de produit scalaire.* On peut écrire la différentiabilité de maniére plus compacte en terme de produit scalaire : si

$$\vec{x} = (x_1,\cdots,x_n) \text{ et } \vec{y} = (y_1,\cdots,y_n)$$

sont des vecteurs de $\mathbf{R}^n$, leur produit scalaire est donné par et noté

$$\vec{x}.\vec{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Posant alors $\vec{a} = (a_1,\cdots,a_n)$ on a

$$a_1(x_1 - x_{0,1}) + \cdots + a_n(x_n - x_{0,n}) = \vec{a}.(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

et donc

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \vec{a}.(\vec{x}-\vec{x}_0) + \|\vec{x}-\vec{x}_0\|\varepsilon(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

ou encore

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \vec{a}.\vec{h} + \|\vec{h}\|\varepsilon(\vec{h}).$$

1.3. Différentielle ; dérivées partielles. Soit f une fonction différentiable en $\vec{x}_0$, alors les coefficients $a_1, \dots, a_n$ (ou ce qui revient au même le vecteur $\vec{a}$) est définit de manière unique : soit $i = 1 \dots_n$, définissons la fonction d'une variable

$$f_i : x \mapsto f(x_{0,1}, \dots, x, \dots, x_{0,n})$$

ou la variable x est placée à la i-iéme coordonnée : on a en particulier

$$f_i(x_{0,i}) = f(x_{0,1}, \dots, x_{0,i}, \dots, x_{0,n}) = f(\vec{x}_0)$$

et on voit par (1.2)

$$\begin{aligned} f_i(x) &= f_i(x_{0,i}) + a_1.0 + \dots + a_i.(x - x_{0,i}) + \dots + a_n.0 \\ &\quad + \|(0, \dots, x - x_{0,i}, \dots, 0)\|\varepsilon((0, \dots, x - x_{0,i}, \dots, 0)) \\ &= f_i(x_{0,i}) + a_i.(x - x_{0,i}) + |x - x_{0,i}|\varepsilon_i(x - x_{0,i}) \end{aligned}$$

en posant

$$\varepsilon_i(h) = \varepsilon((0, \dots, h, \dots, 0)).$$

Cette fonction tend vers 0 quand h tend vers 0 et donc la fonction $x \mapsto f_i(x)$ est une fonction dérivable en $x_{0,i}$ de dérivée

$$f_i'(x_{0,i}) = a_i.$$

En d'autres termes le coefficient a_i est la dérivée au point $x_{0,i}$ de la fonction d'une variable obtenue à partir de $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ en fixant toutes les coordonnées x_j pour $j \neq i$ à la valeur $x_{0,j}$ et en replaçant la i-iéme coordonnée par x.

DÉFINITION 2.3. *Le coefficient a_i (ie la dérivéee de $f_i(x)$ en $x_{0,i}$) s'appelle la* dérivée partielle de f dans la direction x_i au point $\vec{x}_0$ *et on la note*

$$a_i = f_i'(x_{0,i}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0).$$

EXEMPLE 1.3.1. Soit $f(x, y) = x^2y + xy^3 + 2xy$; on va voir que cette fonction est différentiable en tout point (x_0, y_0) de $\mathbf{R}^2$. calculons ses dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, on dérive suivant x en considérant y_0 comme une constante et on évalue le résultat en x_0 : on regarde la dérivée en x_0 de la fonction

$$x \mapsto f(x, y_0) = x^2y_0 + xy_0^3 + 2xy_0.$$

Cette dérivée vaut

$$(x \mapsto f(x, y_0) = x^2y_0 + xy_0^3 + 2xy_0)' = 2xy_0 + y_0^3 + 2y_0$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0y_0 + y_0^3 + 2y_0.$$

De même pour la dérivée en y on considére la dérivée en y

$$(x \mapsto f(x_0, y) = x_0^2y + x_0y^3 + 2x_0y)' = x_0^2 + 3x_0y^2 + 2x_0$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = x_0^2 + 3x_0y_0^2 + 2x_0.$$

1.3.2. *Régles de différentiation.* On dispose comme pour les fonctions d'une variable des critéres suivants pour déterminer si une fonction est différentiable :

(1) Les fonctions constantes et les fonctions coordonnées

$$x_i : \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

sont différentiables sur $\mathbf{R}^n$; les dérivées partielles des fonctions constantes sont nulles et

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

(2) Sommes, produits : Si $f, g : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ sont différentiables en $\vec{x}_0$ alors $f + g$ et $f \times g$ sont différentiables en $\vec{x}_0$.

(3) Quotients : Si de plus $g(\vec{x}_0) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est différentiable en $\vec{x}_0$.

(4) Composition : Si $f : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ différentiable en $\vec{x}_0$ et $\varphi : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ est dérivable (il suffit en fait qu'elle soit dérivable au point $f(\vec{x}_0)$) alors

$$\varphi \circ f : \vec{x} \mapsto \varphi(f(\vec{x}))$$

est différentiable en $\vec{x}_0$.

On a alors les valeurs suivants pour les dérivées partielles : pour tout $j = 1 \dots n$

(1)
$$\frac{\partial f + g}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) + \frac{\partial g}{\partial x_j}(\vec{x}_0).$$

(2)
$$\frac{\partial f \times g}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0)g(\vec{x}_0) + f(\vec{x}_0)\frac{\partial g}{\partial x_j}(\vec{x}_0).$$

(3)
$$\frac{\partial f/g}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = \frac{1}{g(\vec{x}_0)^2}(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0)g(\vec{x}_0) - f(\vec{x}_0)\frac{\partial g}{\partial x_j}(\vec{x}_0)).$$

(4)
$$\frac{\partial \varphi \circ f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = \varphi'(f(\vec{x}_0))\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0).$$

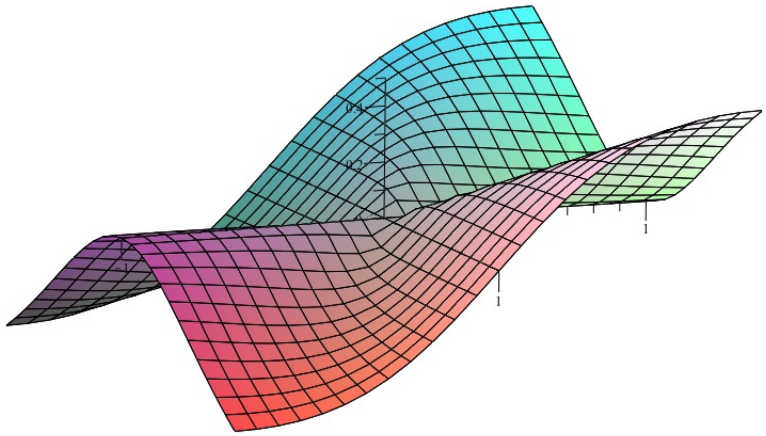


FIGURE 1. $f(x, y) = x^2 y/(x^2 + y^2)$

1.4. Différentiabilité et dérivées partielles : ATTENTION !. Comme on vient de la voir la différentiabilité d'une fonction $f : D(f) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ en $\vec{x}_0$ implique l'existence des dérivées partielles en ce point

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = \lim_{x_j \to x_{0,j}} \frac{f_j(x_j) - f(\vec{x}_0)}{x_j - x_{0,j}},\ j = 1 \dots n.$$

ATTENTION la réciproque n'est PAS vraie : par exemple la fonction

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2},\ (x, y) \neq (0, 0),\ f(0, 0) = 0$$

est différentiable sur $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ mais en $(0, 0)$ elle n'est pas différentiable bien que ses deux derivées partielles existent en $(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

Supposons cette fonction différentiable en $(0, 0)$, on aura alors pour (x, y) proche de $(0, 0)$

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + \|(x, y)\|\varepsilon(x, y) = \|(x, y)\|\varepsilon(x, y).$$

Prenons $(x, y) = (x, x)$ et calculons

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x, x) - f(0, 0)}{x}.$$

D'aprés la derniére égalité cela vaut $(\|(x, y)\| = |x|\|(1, 1)\|)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|\varepsilon(x, x)}{x} = 0.$$