

Partie I: Fonctions de plusieurs variables

L'objectif général du cours de mathématiques au GSE est d'introduire les outils mathématiques qui permettent de décrire de manière précise et efficace le comportement de systèmes physiques

Par exemple la théorie des fonctions d'une variable (Mathématique I) permet de décrire l'évolution en fonction du temps d'une quantité associée à un tel système

Par exemple la fonction

$$t \rightarrow z(t) = z_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

décrit l'altitude d'un corps soumis à l'attraction terrestre ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$) au temps t lâché d'une hauteur z_0 .

* ponctuel(!)

Bien entendu la détermination de l'état d'un système physique peut nécessiter de connaître plusieurs paramètres en fonction du temps: si on

Exemple: si on lance le corps considéré précédemment dans une certaine direction et à une certaine vitesse, l'objet devra être repéré par ses 3 coordonnées dans l'espace

$$x(t) = x_0 + v_{x_0} t$$

$$y(t) = y_0 + v_{y_0} t$$

$$z(t) = z_0 + v_{z_0} t - \frac{1}{2} g t^2$$

où $\vec{v} = (v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$ décrit le vecteur vitesse initiale

la fonction $t \rightarrow (x(t), y(t), z(t))$ est la trajectoire du corps

ainsi on peut se dire qu'il est possible de décrire l'évolution d'un système physique en "superposant" différentes fonctions d'une variable réelle. Cependant un système physique général est souvent beaucoup plus complexe et dépend de nombreux paramètres qui agissent entre eux de manière compliquée.

Ainsi l'accélération gravitationnelle (la constante g) n'est constante qu'en première approximation : sa valeur absolue (g) voire sa direction dépendent du point (x, y, z) où l'on se trouve

ainsi les équations du mouvement qui décrivent la trajectoire d'un corps lancé avec une vitesse initiale peuvent dépendre d'une fonction de 3 variables

$$(x, y, z) \longrightarrow g(x, y, z)$$

Ainsi il est important de savoir étudier les variations d'une fonction de plusieurs variables sur un espace à plusieurs paramètres

D'autre part, considérons le problème précédent sous l'angle de la mécanique Lagrangienne:

On repère un point par ses coordonnées $\vec{x} = (x, y, z)$ et sa vitesse $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$

Soit un vecteur dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$

le principe de conservation de l'énergie dit que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle reste constante:

si m est la masse du corps on a pour tout t

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \text{Cst}$$
$$= \frac{1}{2} m (v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2 + v_{z_0}^2) + mgz_0$$

en effet $(\vec{x}(t), \vec{v}(t)) = (x_0 + v_{x_0}t, y_0 + v_{y_0}t, z_0 + v_{z_0}t - \frac{1}{2}gt^2, v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0} - gt)$
et on retrouve bien l'égalité pour tout temps t .

Ainsi le point $P(t) = (x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$
 dans l'espace \mathbb{R}^6 reste confiné dans le domaine
 des vecteurs dont les coordonnées vérifient

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \text{Cst}$$

Cst étant la valeur du terme
 de gauche pour $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) = (v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}, x_0, y_0, z_0)$

Plus généralement si la gravitation en un
 point (x, y, z) est définie par un vecteur
 $\vec{g}(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z), g_3(x, y, z))$

(au lieu du vecteur constant $(0, 0, -g)$)

Le tout corps $P(t)$ repéré par ses coordonnées
 $(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$
 sera toujours contenu dans le domaine de \mathbb{R}^6
 défini par sous-ensemble

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = m (g_1(x, y, z)x + g_2(x, y, z)y + g_3(x, y, z)z)$$

$$= \text{Cst} = \text{valeur en } (x_0, y_0, z_0, v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$$

Dans ce cours, on va donner des éléments permettant d'étudier de tels sous-ensembles des espaces de paramètres \mathbb{R}^n

Def: Un espace de paramètres est un produit de copies de \mathbb{R}
 $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}} = \mathbb{R}^n$. Un point de cet espace (ou vecteur)

est repéré par ses coordonnées (x_1, \dots, x_n) x_i dans \mathbb{R}
On utilisera souvent une notation vectorielle

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Rappelons qu'on a certaines opérations sur les vecteurs

- somme: $\vec{x} + \vec{x}' = (x_1, x_n) + (x'_1, x'_n) = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$

- multiplication par un scalaire (homothétie):
si λ est dans \mathbb{R}

$$\lambda \cdot \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \text{ dans } \mathbb{R}^n$$

- produit scalaire

$$\vec{x} \cdot \vec{x}' = \sum_{i=1}^n x_i x'_i = x_1 x'_1 + \dots + x_n x'_n \text{ est un réel}$$

Notons que $\vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2$ est le carré de la longueur euclidienne du vecteur \vec{x} .

Def: Une fonction réelle (ou bien à valeurs réelles) est une application qui à tout point d'un sous-ensemble $D(f)$ de \mathbb{R}^n associe une valeur réelle $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, \dots, x_n)$

$D(f)$ est appelé domaine de définition de f .

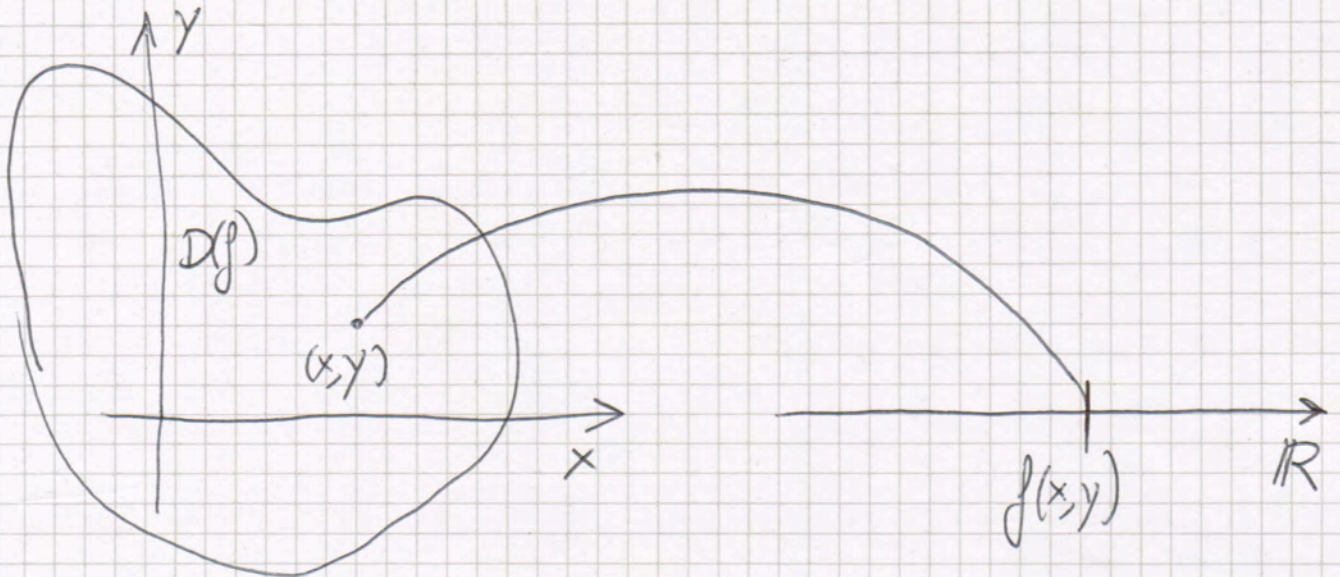
Notations: On dit aussi que f est une fonction de n variables.

$$\begin{aligned} f: D(f) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

On va considérer spécialement les cas $n=2$ et $n=3$ et on emploiera souvent les notations suivantes pour les coordonnées

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) \quad \text{au lieu de} \quad (x_1, x_2) \rightarrow f(x_1, x_2)$$

$$(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) \quad (x_1, x_2, x_3) \rightarrow f(x_1, x_2, x_3)$$



Exemples. ① $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}$ (la longueur du vecteur (x, y))

② $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \rightarrow 1$ fonction constante égale à 1

③ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \rightarrow \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ $D(f) = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$

~~④ $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$ $D(f) = \mathbb{R}^4 - \{0\}$~~

On peut "superposer" plusieurs fonctions de n variables

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

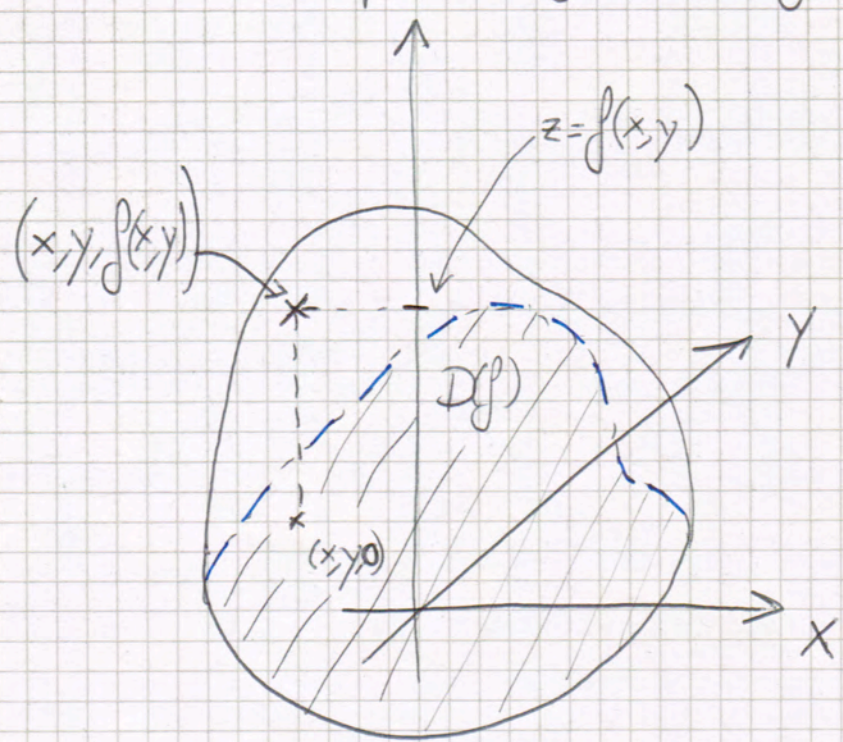
On parle alors de fonction en n variables
à valeurs dans \mathbb{R}^m

Le graphe d'une fonction de plusieurs variables

Def: Soit $f(x_1, \dots, x_n)$ le ~~graphe~~ d'une fonction
~~de n var~~ de n variables. Le graphe de f
est l'ensemble des points de \mathbb{R}^{n+1} de la forme

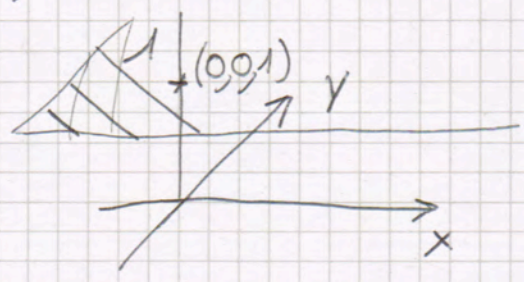
$$(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n) = x_{n+1}) \text{ avec}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \text{ dans } D(f)$$

Exemple: Si f est une fonction de 2 variables



Exemples: $f(x, y) = 1$

le graphe est un plan

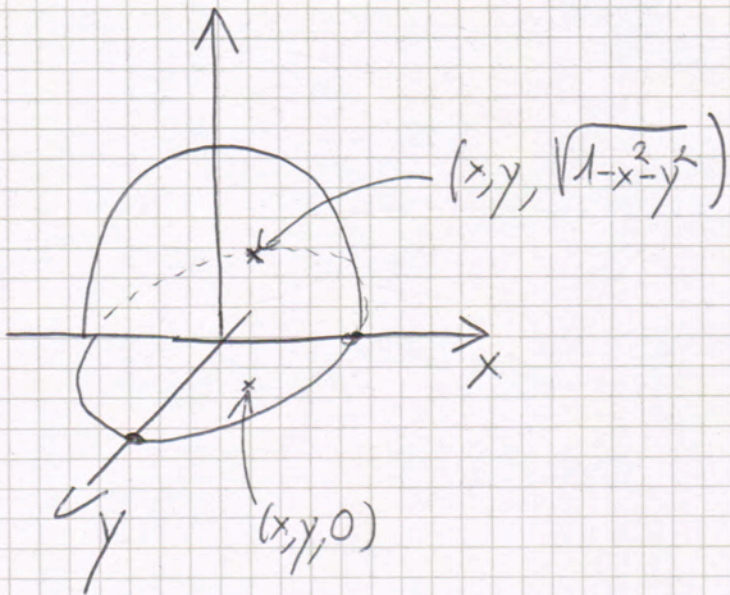


$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad D(f) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$D(f)$ est le disque centré en $(0, 0)$ et de rayon 1

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \iff x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \geq 0$$

Le graphe de f est donc la demi-sphère
("l'hémisphère nord")



Courbes de niveau Variétés

Soit f une fonction de n variables définie sur un domaine $D(f)$. Les ~~courbes~~ ^{variétés} de niveau de f sont les sous-ensembles de $D(f)$ le long desquelles ~~f~~ reste constante.

Une variété de niveau

Soit C une constante, la variété de niveau C est l'ensemble des points (x_1, \dots, x_n) de $D(f)$ qui sont liés par la relation $f(x_1, \dots, x_n) = C$

Notons qu'une variété de niveau peut être vide:
il suffit que C ne soit pas une valeur prise
par f

Exemple: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

la variété de niveau C est vide si $C < 0$
est le point $(0, 0, 0)$ si $C = 0$
" la sphère de rayon \sqrt{C} si
 $C > 0$

Remarque: très souvent, et au moins si l'on se
restreint à des sous-ensembles de $D(f)$ il est
possible en utilisant la relation

$$f(x_1, \dots, x_n) = C$$

d'exprimer un des paramètres x_1, \dots, x_n en fonction
des autres. Ainsi une variété de niveau peut être
vue (au moins sur un sous-ensemble de $D(f)$)
comme le graphe d'une fonction en $n-1$ variables
Elle est donc plus facile à représenter

Les variétés de niveau permettent de se représenter une surface

Exemple: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$C > 0$ si on se restreint à $z > 0$ on a
 $z = \sqrt{C - (x^2 + y^2)}$ qui est définie pour $x^2 + y^2 \leq C$

Vocabulaire: Si f est une fonction en 2 variables on parle de courbe de niveau car la variété de niveau est souvent une courbe

Si f est une fonction en 3 variables on parle de surface de niveau

Exemple: Considérons l'espace à 6 paramètres \mathbb{R}^6
 $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad m > 0$

$$E(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m g z$$

alors un corps ponctuel de masse m soumis à l'attraction terrestre repéré par sa position

$(x(t), y(t), z(t))$ et sa vitesse $(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ évolue toujours le long d'une variété de niveau
 $E(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = E(x(0), y(0), z(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0))$

CHAPITRE 1

Fonctions de plusieurs variables : continuité

1. Introduction, motivation

Voir les notes manuscrites. Elles seront bientôt incluses dans ce texte.

2. Graphes et variétés de niveau

Soit $D \subset \mathbf{R}^n$ un sous ensemble de \mathbf{R}^n et

$$f : \begin{array}{ccc} D & \rightarrow & \mathbf{R} \\ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) & \rightarrow & f(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

une fonction sur D à valeurs réelles. L'ensemble D (noté aussi D_f) est le *domaine de définition* de f .

Pour essayer de représenter f on associe à des sous-ensembles de \mathbf{R}^{n+1} et \mathbf{R}^n appelés le graphe et les variétés de niveau de f

2.1. Graphe d'une fonction.

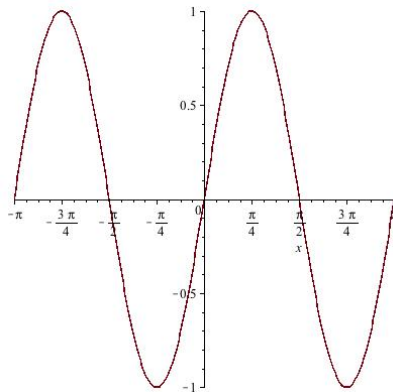
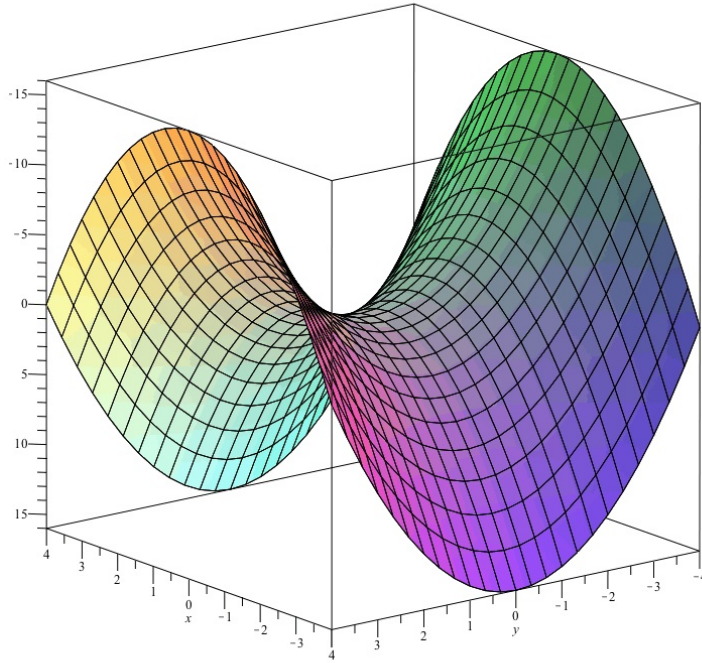


FIGURE 1. Graphe de $f(x) = \sin(2x)$

FIGURE 2. Graphe de $f(x, y) = x^2 - y^2$

DÉFINITION 1.1. Le graphe de f noté \mathcal{G}_f est le sous-ensemble de \mathbf{R}^{n+1}

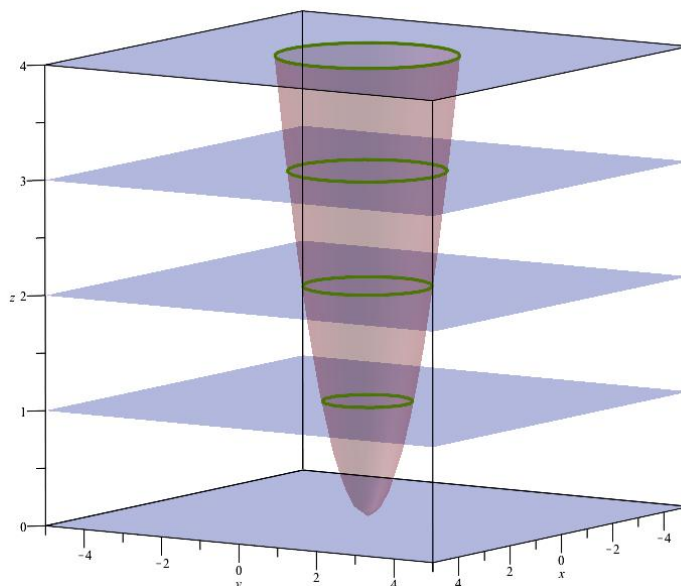
$$\begin{aligned} \mathcal{G}_f &= \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}), (x_1, \dots, x_n) \in D_f, x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)), (x_1, \dots, x_n) \in D_f\} \subset \mathbf{R}^{n+1} \end{aligned}$$

- Si $n = 1$, $\mathcal{G}_f \subset \mathbf{R}^2$ n'est autre que le graphe habituel d'une fonction d'une variable.
- Si $n = 2$ et qu'on représente les coordonnées de \mathbf{R}^3 par (x, y, z) , le graphe de $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$ est l'ensemble des points de la forme

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in D_f\} \subset \mathbf{R}^3.$$

Graphiquement il s'agit d'une surface qui quand on la projette sur le plan horizontal (des (x, y)) redonne le domaine de définition D_f .

- Pour $n \geq 3$ le graphe de f est un objet de \mathbf{R}^{n+1} qui est difficile de représenter sur un tableau ou un écran.



The intersection of the surface $f(x, y) = x^2 + y^2$ and one or more planes of the form $z = \text{constant}$.

FIGURE 3. Courbes de niveau de $f(x, y) = x^2 + y^2$

2.2. Variétés de niveau. Une autre manière d'appréhender une fonction est de considérer ses variétés de niveau qui sont cette fois des sous-ensemble de \mathbf{R}^n (donc plus faciles à représenter).

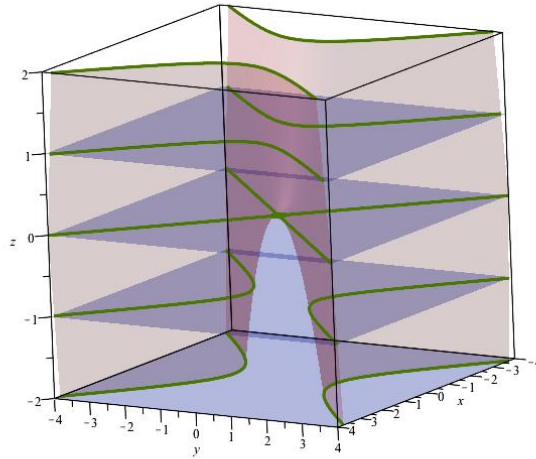
DÉFINITION 1.2. Soit $f : D_f \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction et C une constante, la variété de niveau C est le sous-ensemble de \mathbf{R}^n

$$V_f(C) = \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \text{ t.q. } f(x_1, \dots, x_n) = C\}.$$

Notons que variété de niveau peut être vide : si C n'appartient pas à l'image de f , $f(D_f)$.

3. Approximation et continuité

Dans ce cours on va chercher à décrire une fonction $\vec{x} \rightarrow f(\vec{x})$ quand la variable \vec{x} est "proche" d'un point $\vec{x}_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$. On va montrer que souvent dans ce cas f est "proche" d'une fonction g qui est une somme de fonctions "simples" à étudier.



The intersection of the surface $f(x, y) = x^2 - y^2$ and one or more planes of the form $z = \text{constant}$.

FIGURE 4. Courbes de niveau de $f(x, y) = x^2 - y^2$

3.1. Fonctions de base. Les fonctions simples qu'on va rencontrer sont essentiellement de trois types

- (1) Les fonctions constantes, $f : \vec{x} \rightarrow Cst$ où Cst est une constante (ie. qui ne dépend pas de \vec{x}).
- (2) Les fonctions linéaires ; une fonction f est linéaire si elle est de la forme

$$L : (x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1x_1 + \dots + a_nx_n$$

avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ un vecteur fixe. Les fonctions linéaires satisfont

- $L(\vec{0}) = 0$,
- $L(\vec{x} + \vec{x}') = L(\vec{x}) + L(\vec{x}')$,
- $L(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda L(\vec{x})$.

- (3) Les fonctions homogènes quadratiques : les fonctions de la forme

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

avec a_{ij} , $i = 1..n, j = 1..n$ des nombres réels fixes.

La somme d'une fonction constante et d'une fonction linéaire sera appelée une fonction *affine* et la somme d'une fonction affine et d'une fonction homogène quadratique sera appelée fonction quadratique ou fonction polynomiale de degré 2.

On doit aussi quantifier la notion d'être "proche". Pour cela on introduit la notion de