Série 3

UNIL, Faculté des géosciences et de l'environnement, Cours de Mathématiques II.

7 mars 2014

1. Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction donnée par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Est-ce que la fonction est continue sur $\mathbf{R}^2$? Plus précisement, montrer (i) que f est continue en dehors de $(x,y) = (0,0)$ et (ii) que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Indice: montrer que $2|xy| \leq x^2 + y^2$.

2. Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction donnée par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Est-ce que la fonction est continue sur $\mathbf{R}^2$? Plus précisement, démontrer (i) que f est continue en dehors de $(x,y) = (0,0)$ et (ii) que la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

3. Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction donnée par

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x+y \leq 0 \\ xy + \sqrt{x+y} & \text{si } x+y > 0. \end{cases}$$

Déterminer les points de $\mathbf{R}^2$ où f est continue et où f est pas continue.

4. Déterminer si les fonctions suivantes sont continues en $(x,y) = (0,0)$:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{(xy)^2-(x-y)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{\frac{x^2}{9}+4y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Indication: montrer que $\frac{1}{9}(x^2+y^2) \leq \frac{x^2}{9} + 4y^2$.