

Série 4 - 14 mars 2014

- (1) (a) Calculer les fonctions $g_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ et $g_2(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ pour les fonctions f suivantes.

(i) $f(x, y) = 4x^3y + 3x^2y$

(ii) $f(x, y) = \frac{x^3}{y}$

(iii) $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$

(iv) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$

(v) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

(vi) $f(x, y) = \log((\sin x)(\sin y))$

- (b) Calculer $\frac{\partial}{\partial y} g_1(x, y)$ et $\frac{\partial}{\partial x} g_2(x, y)$ dans chaque cas. Décider si l'égalité suivante est vérifiée :

$$\frac{\partial}{\partial y} g_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} g_2(x, y).$$

- (2) Soit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ et $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ existent pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et les calculer.
- (b) Soit $g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$. Montrer que g n'est pas continue en $(0, 0)$.
- (3) (a) Trouver l'équation du plan tangent à la surface $z = x^2y$ au point $(2, 1, 4)$.
- (b) Trouver l'équation du plan tangent à la surface $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ au point $(-3, 0, 4)$.
- (c) Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de la fonction

$$f(x, y) = -\frac{y^2}{x}$$

au point $(1, 1, -1)$. Existe-t-il un point du graphe où le plan tangent est horizontal ?