

Série 5 - 21 mars 2014

- (1) Considérer une fonction différentiable de deux variables réelles $f(x, y)$. On définit une nouvelle fonction de deux variables réelles

$$\bar{f}(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Montrer que \bar{f} est différentiable et vérifier l'égalité

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}\right)^2.$$

- (2) On appelle angle de deux surfaces en un point de leur intersection l'angle formé par les plans tangents à ces deux surfaces en ce point. Sous quel angle le cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et la sphère $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4$ se coupent-ils au point $P = (1, \sqrt{3}, 0)$? (on pourra calculer les vecteurs normaux).
- (3) (a) Calculer le gradient de la fonction $f(x, y, z) = xe^{yz} + y$.
 (b) Calculer la dérivée de $f(x, y, z)$ dans la direction du vecteur $(1, 1, 1)$ au point $(0, 0, 0)$.
 (c) Au point $(0, 0, 0)$, dans quelle direction la dérivée de $f(x, y, z)$ est-elle maximale (quelle est la valeur de cette dérivée maximale)? minimale (quelle est la valeur de cette dérivée minimale)? nulle?
- (4) Trouver, lorsqu'ils existent, les points critiques des fonctions
 (a) $g(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4$;
 (b) $h(x, y) = x^4 - y^4 + 1$.

et calculer aux points trouvés, les dérivées partielles d'ordres 2

$$\frac{\partial^2 g}{\partial^2 x}, \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 g}{\partial^2 y}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x}, \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 h}{\partial^2 y}$$