Cours de Mathématiques II - UNIL - Faculté des Géosciences et de l'Environnement

Série 7 3 avri 2014

(1) Considérer la fonction réelle de deux variables réelles $f(x,y) = \sin x - y^2$.

(a) Déterminer les points d'extremum (absolu ou relatif) de la fonction $f(x,y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

(b) En quels points du graphe de la fonction $f(x,y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$ le plan tangent au graphe est-il parallèle à l'axe Oy ?

(c) Déterminer les points d'extremum (absolu ou relatif) de la fonction $f(x,y)$ définie sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ -1 \leq y \leq 1\}$.

(2) Considérer la fonction réelle de deux variables réelles

$$\begin{array}{rcl} f\colon D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^4 + 2y^2 - 4xy. \end{array}$$

(a) Calculer la dérivée de la fonction f dans la direction du vecteur $(1,1)$ en tout point (x,y) situé à l'intérieur du domaine de définition de f.

(b) Déterminer les extrema locaux de la fonction f dans l'intérieur de D.

(c) Etudier f sur le bord de D et calculer les extrema de f sur D tout entier.

(3) Considérer la courbe plane (spirale logarithmique)

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \varphi(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t). \end{array}$$

(a) Esquisser cette courbe.

(b) Vérifier qu'en chacun de ses points $P = \varphi(t)$, cette spirale coupe la droite OP, passant par l'origine et par P, avec le même angle (pour cela on calculera le vecteur vitesse $\varphi'(t)$ et son angle avec la droite OP)

(c) Calculer la longueur du vecteur vitesse $\varphi'(t)$ pour tout t.