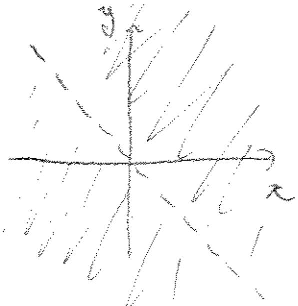
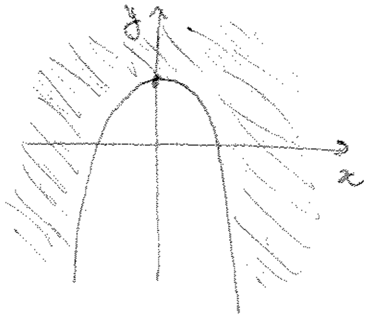
Corrigé Série I

1. i)



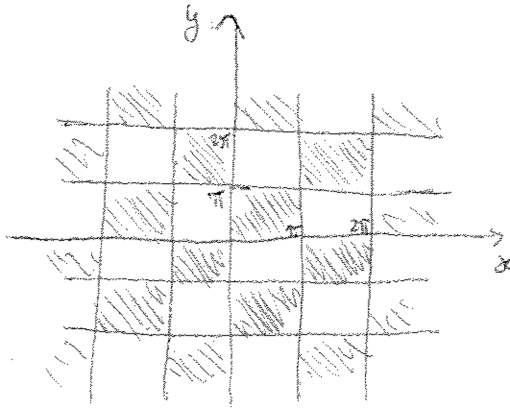
$f(x,y)=\frac{1}{x+y}$ est défini si et seulement si on ne divise pas par zéro, donc $x+y\neq 0$. L'équation $x+y=0$ décrit la droite pointillée. Le domaine est tout le reste, autrement dit le complément.

ii)



$f(x,y)=\sqrt{x^2+y-1}$ est défini si et seulement si on ne prend pas la racine carrée d'un nombre négatif, donc $x^2+y-1\geq 0$. L'équation $y=1-x^2$ (obtenue en isolant y) décrit la parabole (pleine puisqu'elle est contenue dans le domaine, contrairement à l'exemple précédent). Le domaine étant donné par $y\geq 1-x^2$, il faut ainsi choisir la région au-dessus de la parabole $y=1-x^2$.

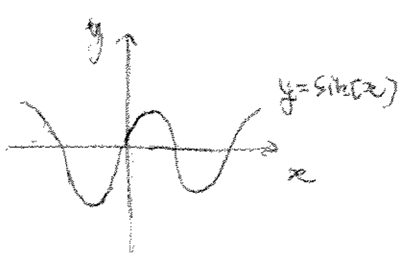
iii)



$f(x,y)=\ln(\sin(x)\sin(y))$ est définie si on ne prend pas le logarithme d'un nombre négatif, donc $\sin(x)\sin(y)\geq 0$. Il y a deux cas possibles :

soient $\sin(x)$ et $\sin(y)$ positif
ou $\sin(x)$ et $\sin(y)$ négatif

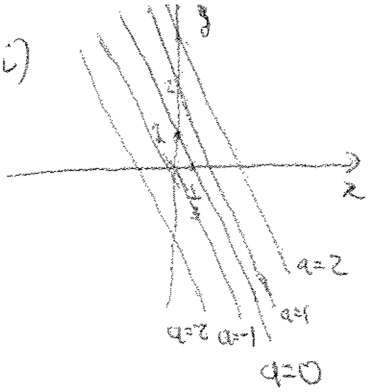
On se rappelle que $\sin(x)\geq 0$ pour $0\leq x\leq \pi$ et $\sin(x)\leq 0$ pour $\pi\leq x\leq 2\pi$, et que $\sin(x)$ est périodique de période 2π.



De même pour $\sin(y)$. Il faut donc considérer les carrés de sommets aux coordonnées des multiples de π comme sur le schéma ci-dessus, puisque $\sin(x)\sin(y)$ est de signe constant sur ces carrés.

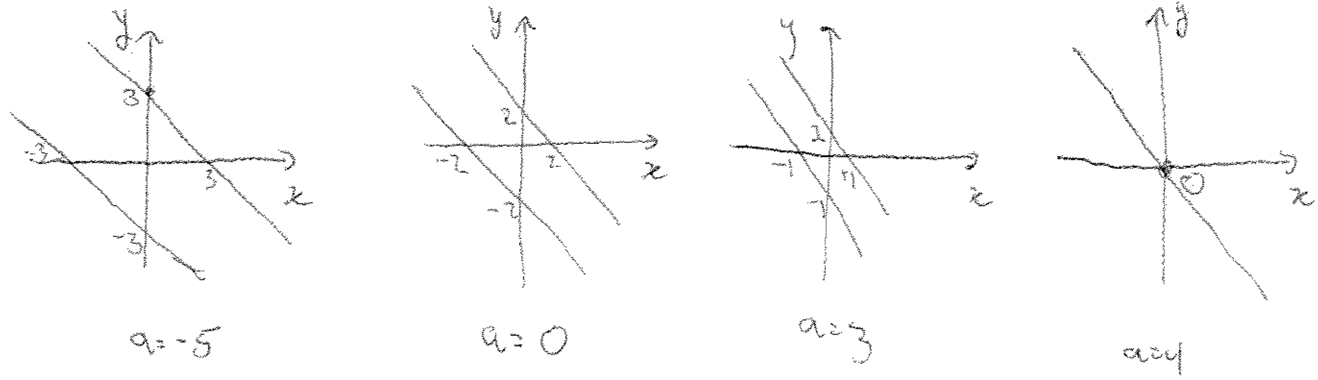
Aussi, les carrés adjacents sont de signes différents

2. i)



$3x+y-1=a \Rightarrow y=-3x+1+a$.
C'est l'équation de la droite de pente -3 passant par le point $(0, 1+a)$

ii)



$$4-x^2-y^2-2xy = 4-(x+y)^2 = a \Rightarrow (x+y)^2 = 4-a \Rightarrow x+y = \pm\sqrt{4-a}$$

(faire attention, il faut absolument considérer la racine positive et négative)

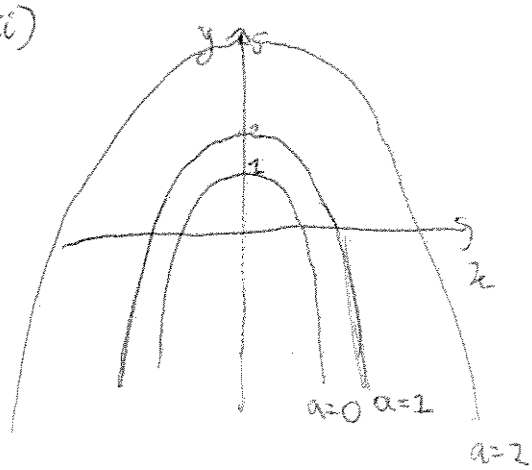
$\Rightarrow y = -x \pm \sqrt{4-a}$. Il y a trois cas :

$a<4$: $\sqrt{4-a}$ est positif (strictement), donc la courbe à niveau consiste en deux droites de pente -1, l'une passant par $(0,\sqrt{4-a})$, l'autre par $(0,-\sqrt{4-a})$

$a=4$: $\sqrt{4-a}=0$, on a une seule droite, de pente -1 passant par $(0,0)$.

$a>4$: (pas nécessaire pour le problème) la racine carrée n'existe pas d'où la courbe à niveau est vide.

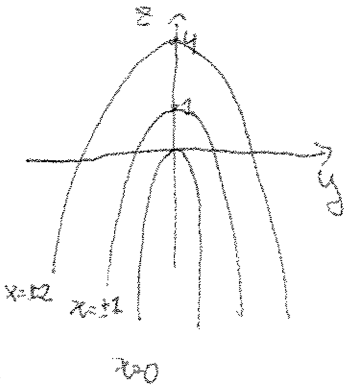
iii)



$\sqrt{x^2+y-1}=a \Rightarrow x^2+y-1=a^2 \Rightarrow$

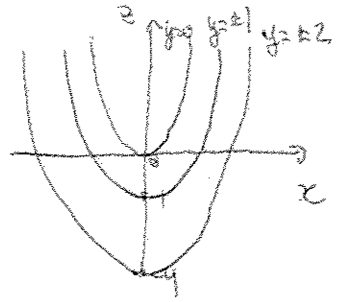
$y=a^2+1-x^2$; c'est une parabole vers le bas d'appex $(0, a^2+1)$.

3. i)



Soit $z=g(x,y)$. Comme dans 2 iii), comme fonction de y, $z=x^2-y^2$ décrit des paraboles vers le bas et d'appex $(0,x^2)$.

ii)



$z=x^2-y^2$ en fonction de x seulement, décrit des paraboles vers le haut et d'appex $(0,-y^2)$

iii)