Cours de Mathématiques II - UNIL - Faculté des Géosciences et de l'Environnement

Corrigé 10, 8 Mai 2014

(1) Si $\vec{F}$ etait conservatif, c'est a dire, $\vec{F} = (F_1, F_2) = \nabla g$ alors $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$. Pour $\vec{F}$,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -x \neq \frac{\partial F_2}{\partial x} = -y,$$

alors $\vec{F}$ n'est pas conservatif. Pour $\vec{G}$

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = 2x^2e^{xy} + x^2e^{xy} + x^3ye^{xy} \neq 3x^2e^{xy} + x^4e^{xy} = \frac{\partial G_2}{\partial x},$$

alors $\vec{G}$ n'est pas conservatif. Pour $\vec{H}$

$$\frac{\partial H_1}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial H_2}{\partial x},$$

alors $\vec{K}$ n'est pas conservatif. Pour $\vec{K}$

$$\frac{\partial K_1}{\partial y} = 1 = 1 = \frac{\partial K_2}{\partial x},$$

et alors un theorème qu'on a vu en classe dit que ce champ est conservatif. On trouve un potentiel :

$$\int (2x + y)dx = x^2 + xy + C(y)$$

où $C(y)$ est une constante qui dépend (peut-être) d' y. De la même façon :

$$\int xdy = xy + C(x)$$

alors chaque fonction de la forme

$$x^2 + xy + C$$

où C est une constante absolue, est un potentiel pour K.
Remarque : il y a deux autres façons de montrer qu'un champ est conservatif ou non : la première est de trouver, ou montrer que ce n'est pas possible de trouver, un potentiel. La deuxième, qui marche juste pour montrer qu'un champ n'est pas conservatif, c'est de trouver une courbe fermée telle que le travail le long de cette courbe n'est pas égal à zéro.

(2) Comme avant, on trouve un potentiel

(a) pour $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

$$\int 2xy^3z^4dx = x^2y^3z^4 + C(y, z)$$

où $C(y, z)$ est une constante qui depend (peut-être) de y et z. De la même façon :

$$\int 3x^2y^2z^4dy = x^2y^3z^4 + C(x, z)$$

et

$$\int 4x^2y^3z^3dz = x^2y^3z^4 + C(x, y).$$

alors chaque fonction de la forme

$$x^2y^3z^4 + C$$

où C est une constante absolue, est un potentiel pour $\vec{F}$. On prend $C = 0$ et on note $f = x^2y^3z^4$.

(b) pour $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$.

$$\int (2x\cos(y) - 2z^3)dx = x^2\cos(y) - 2xz^3 + C(y,z)$$

où $C(y,z)$ est une constante qui dépend (peut-être) de y et z. De la même façon :

$$\int (3 + 2ye^z - x^2\sin(y))dy = 3y + y^2e^z + x^2\cos(y) + C(x,z)$$

et

$$\int (y^2e^z - 6xz^2)dz = y^2e^z - 2xz^3 + C(x,y).$$

alors chaque fonction de la forme

$$3y + y^2e^z + x^2\cos(y) - 2xz^3 + C$$

où C est une constante absolue, est un potentiel pour $\vec{G}$. On prend $C = 0$ et on note $g = 3y + y^2e^z + x^2\cos(y) - 2xz^3$.

(c) pour calculer ce travail on trouve le point de départ et le point d'arrivée pour chaque courbe. (**on note le premier φ par φ_1 et le deuxième φ par φ_2**).

$$\varphi_1(\pi/2) = (0, \frac{\pi}{2}, 0), \varphi_1(\pi) = (-2,0,0)$$
$$\psi(0) = (0,1,1) = \varphi_1(2\pi)$$
$$\varphi_2(0) = (1,3,0), \varphi_1(\pi) = (e^{2\pi}, 0, \ln(2\pi+1)).$$

Alors, on peut calculer le travail :

$$T(\vec{F}, \varphi_1) = f(0, \frac{\pi}{2}, 0) - f(-2,0,0) = \frac{\pi^3}{8} - 4$$
$$T(\vec{F}, \psi) = f(0,1,1) - f(0,1,1) = 0$$
$$T(\vec{F}, \varphi_2) = f(1,3,0) - f(e^{2\pi}, 0, \ln(2\pi+1)) = 9 - e^{4\pi}\ln(2\pi+1)^4$$
$$T(\vec{G}, \varphi_1) = g(0, \frac{\pi}{2}, 0) - g(-2,0,0) = 3\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4} - 4$$
$$T(\vec{G}, \psi) = g(0,1,1) - g(0,1,1) = 0$$
$$T(\vec{G}, \varphi_2) = g(1,3,0) - g(e^{2\pi}, 0, \ln(2\pi+1)) = 9 + 9 + cos(3) - e^{4\pi} + 2e^{2\pi}\ln(2\pi+1)^3.$$