Corrigé Série 3

1. i) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $(x,y) \neq (0,0)$ est composé à partir des variables par multiplication, addition et racine carrée, tous des opérations continues. Donc $f(x,y)$ est continue pour $(x,y) \neq (0,0)$.

ii) $0 \leq |f(x,y)| = \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ par l'inégalité de l'indice.

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$. Ce dernier est continu, d'où on évalue la limite par substitution

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{0^2+0^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Pour prouver que $2|xy| \leq x^2+y^2$: $2|xy| = \pm 2xy$ dépendamment du signe de xy. On note que $x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2 \geq 0$

d'où $x^2+y^2 \geq \pm 2xy \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2|xy|$.

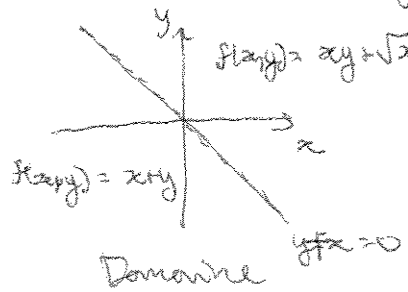
2. i) Continue en dehors de $(x,y) = (0,0)$ pour les mêmes raisons qu'en 1 i)

ii) $$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-0^2}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0^2-y^2}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

Puisque $1 \neq -1$, $f(x,y)$ ne peut avoir une limite lorsque $(x,y)\to(0,0)$.

3. Lorsque $x+y<0$ ou $x+y>0$, $f(x,y)$ est donnée par une expression continue, d'où $f(x,y)$ est continue dans ces régions. Par contre, à la



Domaine

rencontre des deux régions, il faut vérifier que les limites des deux expressions soient identiques. La rencontre des 2 régions est la droite $x+y=0$. On introduit une paramétrisation $(a,-a)$ de cette droite, c'est-à-dire que $\begin{matrix} x = a \\ y = -a \end{matrix}$, $a \in \mathbb{R}$ décrit la droite.

$$\lim_{(x,y)\to(a,-a)} x+y = a-a = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,-a)} xy + \sqrt{x+y} = -a^2 + \sqrt{a-a} = -a^2$$

La fonction est donc continue au point $(0,0)$, mais discontinue en tout point $(a,-a)$, $a \neq 0$.

4. On teste f_1 le long des deux droites $x=0$ et $y=x$

$$\lim_{y\to 0} f_1(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0^2}{0^2-y^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f_1(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4-0^2} = 1$$

$0 \neq 1$ d'où la limite n'existe pas et donc f_1 n'est pas continue en $(0,0)$.

Pour f_2, on procède comme dans la première question :

$$0 \le |f_2(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{\frac{x^2}{9}+4y^2}} \le \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{\frac{x^2}{9}+4y^2}}$$ par l'inégalité démontrée en 1 ii)

$$\le \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{\frac{1}{9}(x^2+y^2)}}$$ par l'inégalité de l'indice

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

D'où, $0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f_2(x,y)| \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2} = 0$.

Donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0$, et $f_2(0,0)=0$, d'où f_2 est continue en $(0,0)$

Pour démontrer l'inégalité $\frac{1}{9}(x^2+y^2) \le \frac{x^2}{9}+4y^2$: comme $y^2 \ge 0$, on a

$\left(4-\frac{1}{9}\right)y^2 \ge 0 \Rightarrow 4y^2 \ge \frac{1}{9}y^2 \Rightarrow \frac{1}{9}x^2+4y^2 \ge \frac{1}{9}x^2+\frac{1}{9}y^2$.