MATHGEO-2014-SOL5

(1) Si $f, g_1, \ldots, g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont fonctions différentiables, alors la fonction $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\bar{f}(x) = f(g_1(x), \ldots, g_n(x))$ (avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$) est différentiable, et

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(g_1(x), \ldots, g_n(x)).$$

Posons $n = 2$, $g_1(r, \varphi) = r \cos\varphi$, $g_2(r, \varphi) = r \sin\varphi$, et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors g_1 et g_2 sont differentiables, donc la fonction $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\bar{f}(r, \varphi) = f(g_1(r, \varphi), g_2(r, \varphi))$ est également differentiable. Nous écrivons $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(r, \varphi), g_2(r, \varphi))$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(r, \varphi), g_2(r, \varphi))$. $\bar{f}_r = \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}(r, \varphi)$, $\bar{f}_\varphi = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}(r, \varphi)$. Avec cette notation,

$$\bar{f}_r = \frac{\partial g_1}{\partial r}(r, \varphi) f_x + \frac{\partial g_2}{\partial r}(r, \varphi) f_y$$

$$\bar{f}_\varphi = \frac{\partial g_1}{\partial \varphi}(r, \varphi) f_x + \frac{\partial g_2}{\partial \varphi}(r, \varphi) f_y.$$

Nous calculons que

$$\frac{\partial g_1}{\partial r}(r, \varphi) = \cos\varphi, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \varphi}(r, \varphi) = -r \sin\varphi,$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial r}(r, \varphi) = \sin\varphi, \quad \frac{\partial g_2}{\partial \varphi}(r, \varphi) = r \cos\varphi.$$

Par suite,

$$\bar{f}_r = \cos(\varphi) f_x + \sin(\varphi) f_y, \quad \bar{f}_\varphi = -r \sin(\varphi) f_x + r \cos(\varphi) f_y,$$

$$\left(\bar{f}_r\right)^2 = \cos^2(\varphi) f_x^2 + 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) f_x f_y + \sin^2(\varphi) f_y^2,$$

$$\left(\frac{1}{r} \bar{f}_\varphi\right)^2 = \sin^2(\varphi) f_x^2 - 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) f_x f_y + \cos^2(\varphi) f_y^2,$$

et donc (grâce à la formule $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$)

$$\left(\bar{f}_r\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \bar{f}_\varphi\right)^2 = f_x^2 + f_y^2.$$

(2) Soit $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2$, $f_2(x, y, z) = (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$. Nous calculons que

$$\nabla f_1(x, y, z) = 2(x, y, 0), \quad \nabla f_2(x, y, z) = 2(x-2, y, z).$$

Donc les vecteurs normaux aux surfaces $\{f_1 = 4\}$ et $\{f_2 = 4\}$ au point d'intersection $P = (1, \sqrt{3}, 0)$ sont

$$n_1 := \nabla f_1(P) = 2(1, \sqrt{3}, 0), \quad n_2 := \nabla f_2(P) = 2(-1, \sqrt{3}, 0).$$

L'angle θ formé par les plans tangents à ces surfaces en ce point est la même que l'angle entre les vecteurs normaux n_1, n_2, qui satisfait à la relation

$$\cos(\theta) = \frac{n_1 \cdot n_2}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|}.$$

On a

$$\|n_1\|^2 = 4(1^2 + (\sqrt{3})^2) = 4 \cdot 4,$$
$$\|n_2\|^2 = 4(1^2 + (\sqrt{3})^2) = 4 \cdot 4,$$
$$n_1 \cdot n_2 = 4(1 \cdot (-1) + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 0 \cdot 0) = 4 \cdot 2,$$

donc

$$\cos(\theta) = \frac{2 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{1}{2}.$$

Nous concluons que $\theta = 60°$.

(3) (a) Soit $f = xe^{yz} + y$. Alors

$$\nabla f = (e^{yz}, zxe^{yz} + 1, yxe^{yz}).$$

(b) Puisque $\nabla f(0,0,0) = (1,1,0)$, on en déduit que

$$D_{(1,1,1)} f(0,0,0) = \nabla f(0,0,0) \cdot (1,1,1) = (1,1,0) \cdot (1,1,1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2.$$

(c) La direction dans laquelle la dérivee de f au point $(0,0,0)$ est-elle maximale (resp. minimale) est $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ (resp. $-\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$). On a $D_{(x,y,z)} f(0,0,0) = 0$ quand $(x,y,z) \cdot (1,1,0) = 0$, c'est à dire, quand $y = -x$; la direction correspondant est alors $v = (x,-x,z)/\|(x,-x,z)\|$ (pourvu que $(x,-x,z) \neq (0,0,0)$).

(4) (a) Soit $g = x^4 + x^2y^2 + y^4$. Alors

$$\nabla g = (4x^3 + 2xy^2, 2x^2y + 4y^3) = (2x(2x^2 + y^2), 2y(x^2 + 2y^2)).$$

On a $\nabla g = 0$ seulement si
- $2x = 0$ ou $2x^2 + y^2 = 0$, et
- $2y = 0$ ou $x^2 + 2y^2 = 0$.

La première cas n'est possible que si $x = 0$ ou $(x,y) = (0,0)$, la deuxième si $y = 0$ ou $(x,y) = (0,0)$. Nous vérifions que $\nabla g(0,0) = 0$. Donc le seul point critique est $(0,0)$. En général, on a

$$\frac{\partial^2 g}{\partial^2 x} = 12x^2 + 2y^2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 4xy, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 4xy, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial^2 y} = 12y^2 + 2x^2,$$

Au point $(x,y) = (0,0)$, ils sont tous zéro.

(b) Soit $h = x^4 - y^4 + 1$. Alors

$$\nabla h = (4x^3, -4y^3).$$

On a $\nabla h = 0$ seulement si $4x^3 = 0$ et $-4y^3 = 0$, c'est à dire, si $x = 0$ et $y = 0$. Nous vérifions que $\nabla h(0,0) = 0$. Donc le seul point critique est $(0,0)$. En général, on a

$$\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial^2 y} = -12y^2.$$

Au point $(x,y) = (0,0)$, ils sont tous zéro.