

MATHGEO-2014-SOL7

(1) Soit $f = \sin x - y$.

(a) On calcule $\nabla f = (\cos x, -2y)$ et

$$Q(f) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a $\nabla f = 0$ si et seulement si $y = 0$ et $x = \pi/2 + \pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$; dans ce cas,

$$Q(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

si n est paire, et

$$Q(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

si n est impaire. Donc f a comme maximums relatifs $(\pi/2 + 2\pi n, 0)$ et points cols $(3\pi/2 + 2\pi n, 0)$ ($n \in \mathbb{Z}$).

(b) Le plan tangent au graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ au point (x_0, y_0, z_0) (avec $z_0 = f(x_0, y_0)$) est définie par l'équation $(x, y, z) \cdot n = (x_0, y_0, z_0) \cdot n$, où

$$n = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0), \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0), -1 \right).$$

On calcule

$$n = (\cos x_0, -2y_0, -1).$$

Il est parallèle à l'axe Oy quand $n \cdot (0, 1, 0) = 0$, c'est-à-dire, quand $y_0 = 0$.

(c) Nous avons vu ci-dessus que f n'a pas de points d'extremum relatif dans l'intérieur de la région D . Sur le bord de cette région, on calcule que

- $f(x, \pm 1) = \sin x - 1$ (avec $x \in [0, \pi/2]$) a un minimum relatif au point $x = 0$ de valeur -1 , et un maximum relatif au point $x = \pi/2$ de valeur 0 ;
- $f(\pi/2, y) = 1 - y^2$ (avec $y \in [-1, 1]$) a des minimums relatifs aux points $y = \pm 1$ de valeur 0 , et un maximum relatif au point $y = 0$ de valeur 1 ;
- $f(0, y) = -y^2$ a des minimums relatifs aux points $y = \pm 1$ de valeur -1 , et un maximum relatif au point $y = 0$ de valeur 0 .

Nous avons trouvé les points d'extremum relatif de la restriction de f au bord de D . Maintenant, nous devons déterminer lequel de ces points sont points d'extremum relatif de f sur D tout entier.

- $(0, -1)$ est un minimum relatif de f sur D : On a $f(0, -1) = -1$ et, pour $\varepsilon_1 \geq 0$ et $\varepsilon_2 \geq 0$, on a $f(\varepsilon_1, -1 + \varepsilon_2) - f(0, -1) = \sin(\varepsilon_1) - (-1 + \varepsilon_2)^2 + 1 = \sin(\varepsilon_1) + \varepsilon_2(2 - \varepsilon_2)$, ce qui est non négatif lorsque $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sont suffisamment petites (par exemple, lorsque $\varepsilon_1 \leq \pi$ et $\varepsilon_2 \leq 2$). De la même manière, on vérifie que $f(0, 1)$ est un minimum relatif de f sur D .
- Nous avons vu que $(\pi/2, 0)$ est un maximum relatif de f sur tout le plan \mathbb{R}^2 , et en particulier, sur D .
- Les points $(0, 0)$, $(\pi/2, -1)$ et $(\pi/2, 1)$ ne sont pas points d'extremum relatif de f sur D :
 - On a $f(\varepsilon, 0) - f(0, 0) = \sin(\varepsilon)$ et $f(0, \varepsilon) - f(0, 0) = -\varepsilon^2$, qui ont des signes différents pour petit ε .

- On a $f(\pi/2 - \varepsilon, -1) - f(\pi/2, -1) = \cos(\varepsilon) - 1$ et $f(\pi/2, -1 + \varepsilon) - f(\pi/2, -1) = \varepsilon(2 - \varepsilon)$, qui ont des signes différents pour petit ε .
 - On a $f(\pi/2 - \varepsilon, 1) - f(\pi/2, 1) = \cos(\varepsilon) - 1$ et $f(\pi/2, 1 - \varepsilon) - f(\pi/2, 1) = \varepsilon(2 - \varepsilon)$, qui ont des signes différents pour petit ε .
- (2) Soit $f = x^4 + 2y^2 - 4xy$ sur $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$. On a $\nabla f(x, y) = 4(x^3 - y, y - x)$.
- (a) $\nabla_{(1,1)} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot (1, 1) = 4((x^3 - y) + (y - x)) = 4(x^3 - x)$.
- (b) On a $\nabla f(x, y) = 0$ seulement si $x^3 = y$ et $y = x$, ou de manière équivalente,
- $$(x, y) \in \{(0, 0), (1, 1), (-1, -1)\}.$$

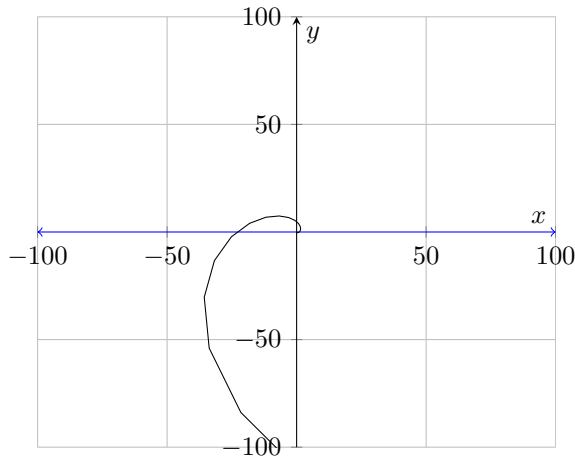
Donc il n'y a pas de points d'extremum relatif dans l'intérieur de D .

(c) Sur le bord de D , on a:

- $f(x, -1) = x^4 + 4x + 2$, $\frac{d}{dx} f(x, -1) = 4(x^3 + 1)$ qui = 0 seulement si $x = -1$;
- $f(1, y) = 2y^2 - 4y + 1$, $\frac{d}{dy} f(1, y) = 4(y - 1)$, qui = 0 seulement si $y = 1$;
- $f(x, 1) = x^4 - 4x + 2$, $\frac{d}{dx} f(x, 1) = 4(x^3 - 1)$, qui = 0 seulement si $x = 1$;
- $f(-1, y) = 2y^2 + 4y + 1$, $\frac{d}{dy} f(-1, y) = 4(y + 1)$, qui = 0 seulement si $y = -1$.

Donc tout les extremums relatifs de f sur D tout entier sont situés dans $\{(\pm 1, \pm 1)\}$. On a $f(-1, -1) = f(1, 1) = -1$ (minimum) et $f(-1, 1) = f(1, -1) = 7$ (maximum).

- (3) Soit $\varphi(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$. On a $\varphi'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$.



- (a)
- (c) On a $\|\varphi'(t)\|^2 = e^{2t}((\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2) = e^{2t}(2\cos^2 t + 2\sin^2 t) = 2e^{2t}$, donc $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{2}e^t$.
- (b) En chaque point $P = \varphi(t)$, cette spirale coupe la droite OP avec l'angle θ , où

$$\cos \theta = \frac{\varphi(t) \cdot \varphi'(t)}{\|\varphi(t)\| \|\varphi'(t)\|}.$$

On a $\|\varphi(t)\| = e^t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = e^t$ et

$$\varphi(t) \cdot \varphi'(t) = e^{2t}(c(c - s) + s(s + c)) = e^{2t}(c^2 + s^2) = e^{2t},$$

où nous avons écrit $c = \cos t, s = \sin t$. Donc $\theta = \arccos(1/\sqrt{2})$ est indépendant de t .