Cours de Mathématiques II - UNIL - Faculté des Géosciences et de l'Environnement
Série 8, 11 Avril 2014

(1) Corrigé :

(a) Notons que $g(t) = a + t(b-a)$ satifait $g(0) = a$ et $g(1) = b$. Alors, on peut prendre $\phi(t) = (0 + t(1-0), 1 + t(4-1), 2 + t(-1-2)) = (t, 1+3t, 2-3t)$.

(b) Pour chaque fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le graphe dans le plan xy et donné par $x \mapsto (x, f(x))$. Alors prenons,

$$\phi(t) = (t, t^3 \sin(t)),\ t \in [0, \pi].$$

(2) Corrigé :

(a) Utilisons le y-coordonnée : Considerez un point (x, y) a cette parabole : Pour chaque $y \in [-1, 1]$ la valeur x satifait $x = y^2$. Et alors

$$\phi(t) = (t^2, t),\ t \in [-1, 1]$$

est une représentation paramétrique.

(b) Une représentation paramétrique d'un cercle de rayon R dans le plan xz, centré au point $(0, 0, 0)$ est

$$(R\sin(t), 0, R\cos(t)), t \in [0, 2\pi].$$

Alors, ajoutons le centre et prenons $R = 2$ nous avons :

$$\phi(t) = (1, 0, 0) + (2\sin(t), 0, 2\cos(t)) = (2\sin(t) + 1, 0, 2\cos(t)),\ t \in [0, 2\pi].$$

(3) Corrigé : Notons

$$\gamma(t) := (x(t), y(t)) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$$

nous avons

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1 - \cos(t), \sin(t))$$

et

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} = \sqrt{2 - 2\cos(t)}.$$

Nous devons faire l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} dt$$

aNotons que $1 - \cos(t) = 2\sin^2(\frac{t}{2})$ nous avons $\sqrt{2 - 2\cos(t)} = \sqrt{4\sin^2(\frac{t}{2})} = 2\sin(\frac{t}{2})$. Alors, la longueur est égale à

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} dt = \int_0^{2\pi} 2\sin(\frac{t}{2}) dt == -4\cos(\frac{t}{2})|_0^{2\pi} = 4 - (-4) = 8$$