Cours de Mathématiques II - UNIL - Faculté des Géosciences et de l'Environnement

Série 9, Corrigé

(1) **Soit le champ de vecteurs**

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + y, x - y, x)$$

(a) **Calculer son travail le long de la courbe**

$$\psi(t) = (\cos t, \sin t, \sin t),\ \ t \in [0, 2\pi].$$

Le champ est-t-il conservatif ?

(b) **Calculer son travail le long de la courbe**

$$\varphi(t) = (\cos t, 3\sin t, t),\ \ t \in [0, 2\pi].$$

(2) **Montrer que les champs suivants sont conservatifs**

(a) $\vec{F}(x, y, z) = (y + e^z, x + z\cos y, xe^z + \sin y)$

(b) $\vec{G}(x, y, z) = (y^2 + ze^{x-y}, 2xy - ze^{x-y} + 3z^4, e^{x-y} + 12yz^3 + 1)$

(c) **Calculer le travail de ces deux champs le long de la courbe**

$$\varphi(t) = (2\cos t, t\sin t, t^2\cos t\sin t),\ \ t \in [\pi/2, \pi].$$

(1) On commence

(a) Le travail est :

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, \cos t)dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t, \cos t - \sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, \cos t)dt =$$

$$\int_0^{2\pi} -\sin t\cos t - \sin^2 t + \cos^2 t - \cos t\sin t + \cos^2 t =$$

$$\int_0^{2\pi} 3\cos^2 t - 1 - 2\sin t\cos t = \pi \neq 0$$

le champ n'est pas conservatif, parce que son travail le long d'une courbe fermée n'est pas zéro.

(b) Le travail est

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, 3\sin t, t) \cdot (-\sin t, 3\cos t, 1)dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos t + 3\sin t, \cos t - 3\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, 3\cos t, 1)dt =$$

$$\int_0^{2\pi} -\sin t\cos t - 3\sin^2 t + 3\cos^2 t - 9\cos t\sin t + \cos t dt =$$

$$\int_0^{2\pi} -3 + 6\cos^2 t - 10\cos t\sin t + \cos t dt = 0.$$

(2) Dans chaque cas, on cherche $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ avec $\nabla f = F$.

(a) on a

$$f(x,y,z) = xy + xe^z + C_1(y,z)$$

où $C_1(y,z)$ est constant par rapport à x. De la même façon,

$$f(x,y,z) = xy + z\sin y + C_2(x,z)$$

où $C_2(x,z)$ est constant par rapport à y. De la même façon,

$$f(x,y,z) = xe^z + z\sin y + C_3(x,y)$$

où $C_3(x,y)$ est constant par rapport à z. Ainsi, on voit que toute fonction de la forme

$$f(x,y,z) = xy + xe^z + z\sin y + C$$

pour tout constant absolu C aura $\nabla f = F$.

(b) On a $\vec{G}(x,y,z) = (y^2 + ze^{x-y}, 2xy - ze^{x-y} + 3z^4, e^{x-y} + 12yz^3 + 1)$

$$g(x,y,z) = xy^2 + ze^{x-y} + C_1(y,z)$$

où $C_1(y,z)$ est constant par rapport à x. De la même façon,

$$g(x,y,z) = xy^2 + ze^{x-y} + 3yz^4 + C_2(x,z)$$

où $C_2(x,z)$ est constant par rapport à y. De la même façon,

$$g(x,y,z) = ze^{x-y} + 3yz^4 + z + C_3(x,y)$$

où $C_3(x,y)$ est constant par rapport à z. Ainsi, on voit que toute fonction de la forme

$$g(x,y,z) = xy^2 + ze^{x-y} + 3yz^4 + z + C$$

pour tout constant absolu C aura $\nabla g = G$. On peut aussi bien choisir que le constant absolu soit égale à zéro.

(c) On trouve les points finals de la courbe :

$$\varphi(\frac{\pi}{2}) = (2\cos\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}, (\frac{\pi}{2})^2\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}) = (0, \frac{\pi}{2}, 0)$$

$$\varphi(\pi) = (2\cos\pi, \pi\sin\pi, (\pi)^2\cos\pi\sin\pi) = (-2, 0, 0)$$

et par ce que vous avez vu pendant le cours, comme ces champs vectoriels sont conservatifs, on a

$$T(F, \varphi([\frac{\pi}{2}, \pi])) = f(-2,0,0) - f(0, \frac{\pi}{2}, 0) = -2 - 0 = -2$$

et

$$T(G, \varphi([\frac{\pi}{2}, \pi])) = g(-2,0,0) - g(0, \frac{\pi}{2}, 0) = 0 - 0 = 0.$$