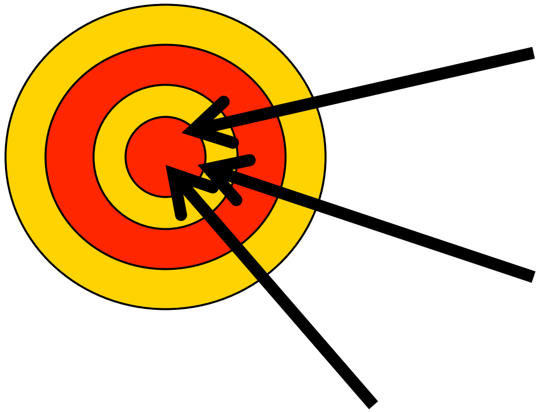
Approche statistique de la mesure

Jean-Marie Fürbringer

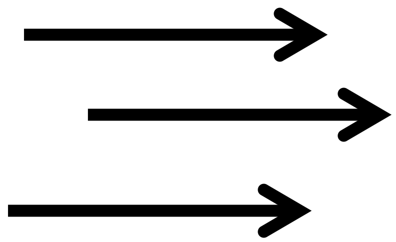
"Le stratège victorieux cherche la bataille après avoir gagné la guerre, alors que celui destiné à la déroute commence par se battre et essaye ensuite de gagner"

D'après Sun Tzu, L'art de la guerre

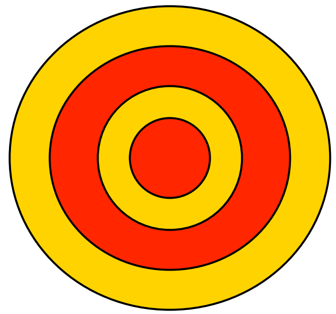


Objectif

- Vous transmettre les éléments de base pour intégrer le calcul d'erreur dans votre démarche expérimentale



Comment ?

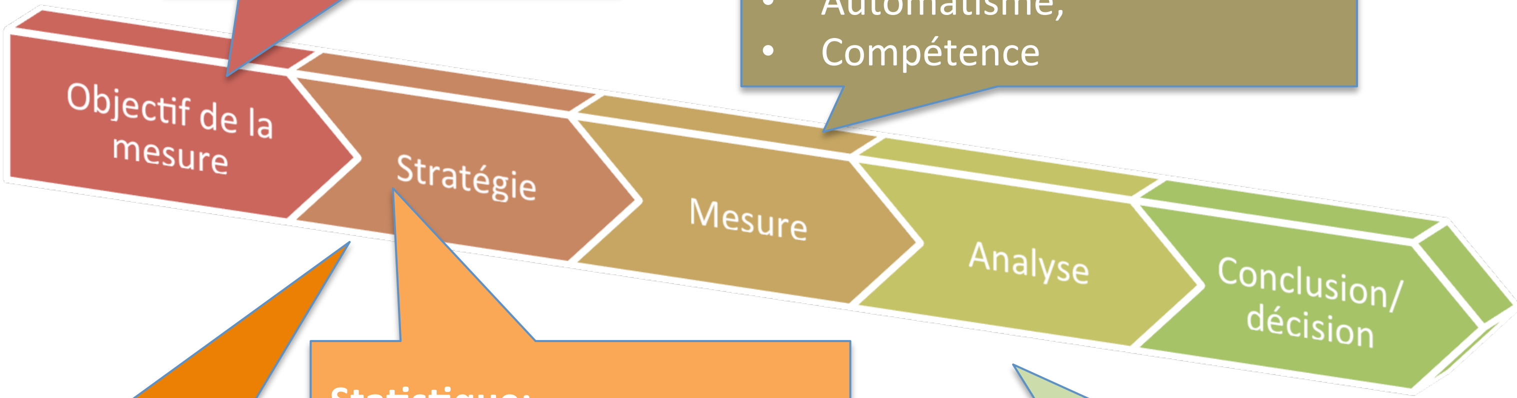


- En faisant une piqûre de rappel de statistique
- En montrant comment ces concepts interviennent dans le calcul d'erreur
- En illustrant avec des exemples simples

Le processus de mesure

- Pourquoi faire ?
- Qui est le client ?
- Importance ?
- Délais ? Budget ?
  Précision ?

- Cahier de laboratoire
- Protocole
- Ordre des mesures
- Reproductibilité, répétition,
- Sauvegarde,
- Automatisme,
- Compétence

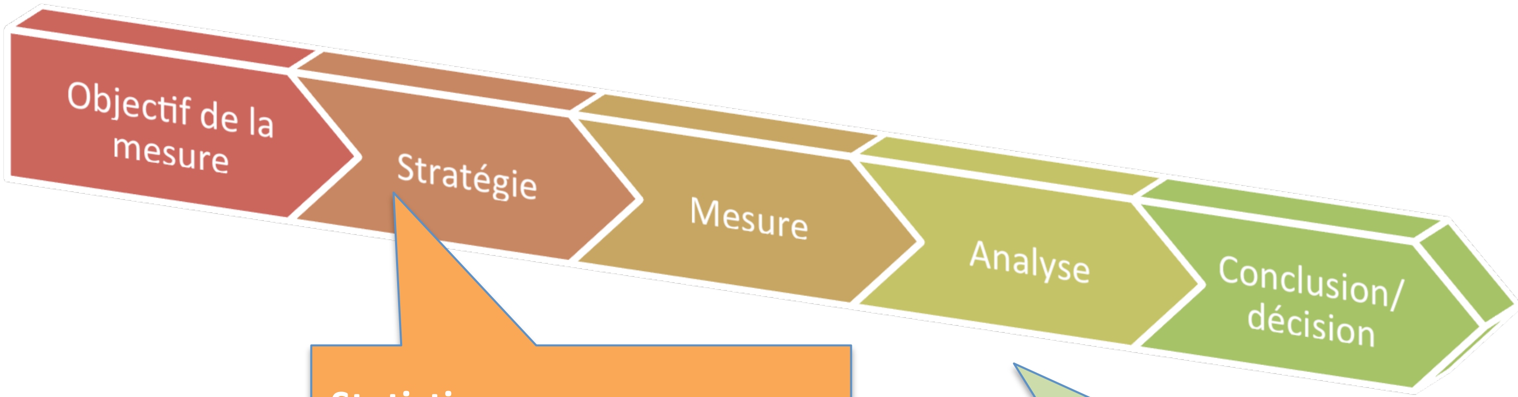


Technologie:
- Instrument, sonde, technique de mesure
- automatisme
- fiabilité

Statistique:
- Combien de points de mesure ?
- Où les placer dans l'espace expérimental ?
- Combien de répétition vs quelle précision ?

- Résultats
- Intervalles de confiance

Le processus de mesure



Statistique:

- Combien de points de mesure ?
- Où les placer dans l'espace expérimenta l?
- Combien de répétition vs quelle précision ?

- Résultats
- Intervalles de confiance

On va faire les choses à l'envers

1. Comment calculer les marges d'erreur
2. Comment les minimiser et maximiser l'information

Trois caractéristiques essentielles du 'monde' à considérer lorsque l'on fait des mesures

- **Multivariable** : les phénomènes qui nous intéressent sont la plupart du temps influencés par plusieurs facteurs
- **Bruyant** (noisy) : tous les instruments de mesure ont un niveau de précision fini et des influences non souhaitées interviennent
- **Avec des interactions** : la réponse d'un facteur dépend de l'état d'un autre facteur

⇒ une approche statistique depuis le début

Rappels de statistique

- Moyenne
- Variance
- Ecart type

- *Coefficient de variation*

- Covariance

- *Coefficient de corrélation*

Indépendant de l'unité

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$s_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

$$s_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$coef\,\mathrm{var} = \frac{\sqrt{s^2}}{\bar{x}}$$

$$corr_{xy} = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2 s_y^2}}$$

Principes de la variance

$$\mathrm{var}(aZ+b) = a^2\,\mathrm{var}(Z)$$

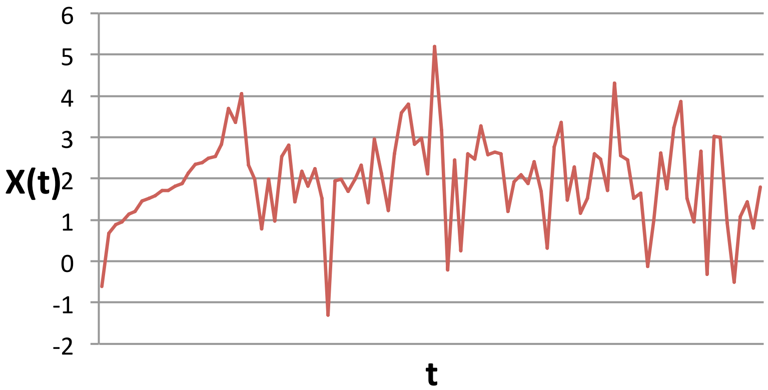
$$\mathrm{var}(Z_1+Z_2) = \mathrm{var}(Z_1) + \mathrm{var}(Z_2) + 2\,\mathrm{cov}(Z_1,Z_2)$$

si Z_1, Z_2 sont indépendants:

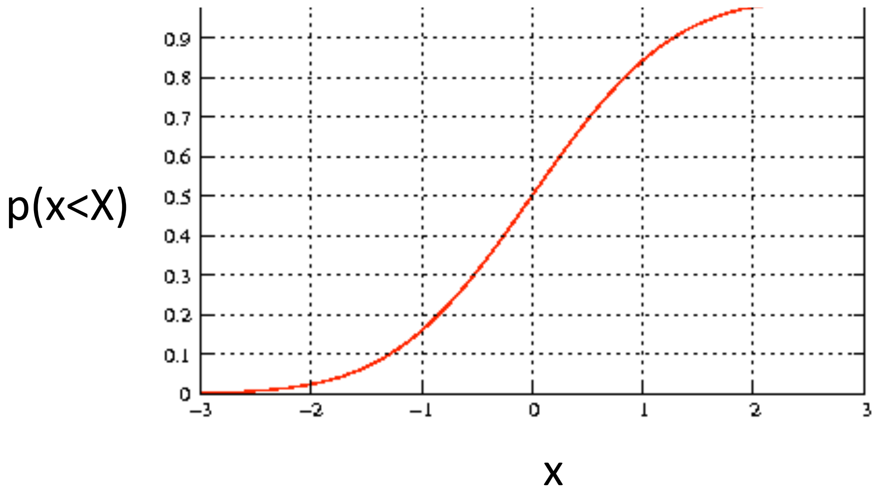
$$\mathrm{var}(Z_1+Z_2) = \mathrm{var}(Z_1) + \mathrm{var}(Z_2)$$

$$\mathrm{var}(a_1Z_1+a_2Z_2) = a_1^2\,\mathrm{var}(Z_1) + a_2^2\,\mathrm{var}(Z_2)$$

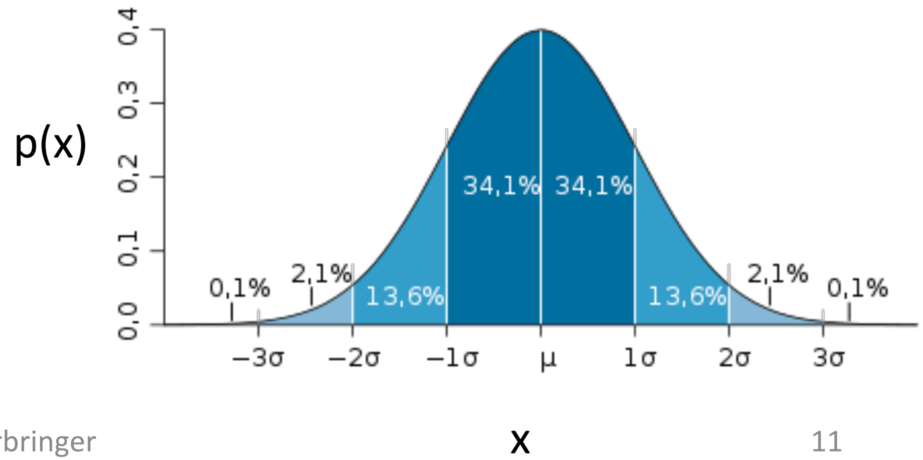
Distribution statistique



Loi de répartition



Densité de probabilité



Distributions connues

- Quelles distributions connaissez-vous ?
- A quoi correspondent-elles ?
- Pourquoi les utilisez-vous ?

Relation entre les données et les distributions

Données originales :	Y_i	$N(\mu,\sigma)$
Combinaison linéaire :	$\alpha_j=\sum x_{ij}Y_i$	$N(\mu,\sigma)$
Somme des carrés :	$\Sigma(\alpha_j)^2$	$X^2(\omega)$
Rapport de somme de carrés :	$(\alpha_{ji})^2/(\alpha_{ji})^2$	$F(\nu,\omega)$

Analyse d'Erreurs

Protocol, sondes, système de mesure

Agir pour les minimiser

Quelle origine?

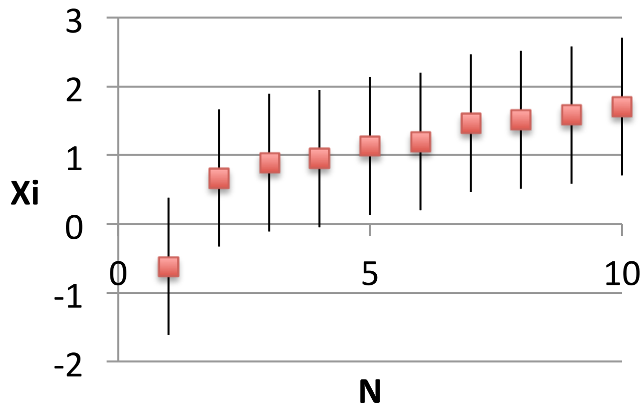
Quelle influence sur le résultat?

Déterminer un intervalle de confiance

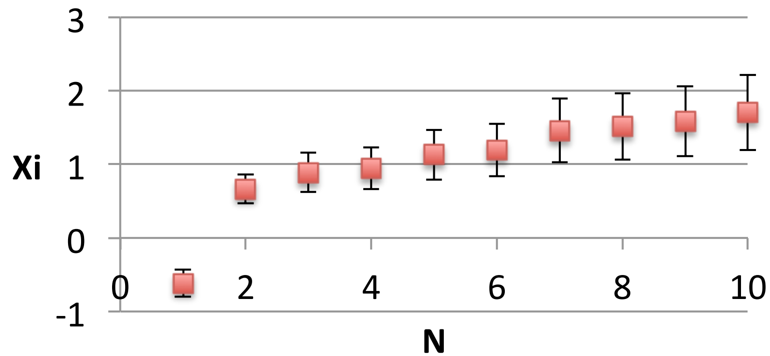
Analyse et interprétation

Type d'erreur
en fonction de l'influence sur les résultats

- Absolue



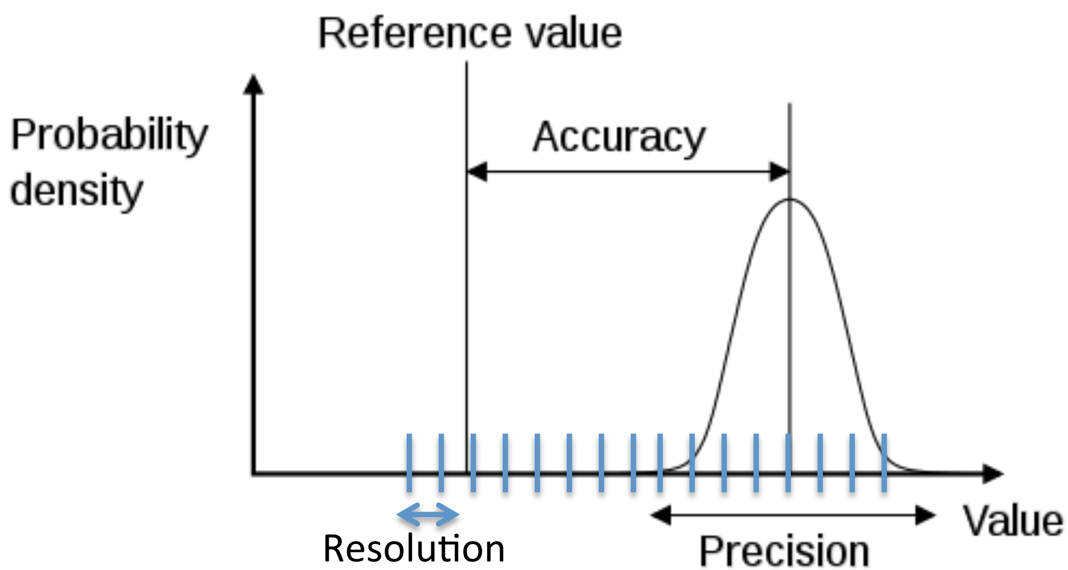
- Proportionnelle



Type d'erreurs de mesure en fonction de la cause

Il faut considérer trois sources d'erreur :

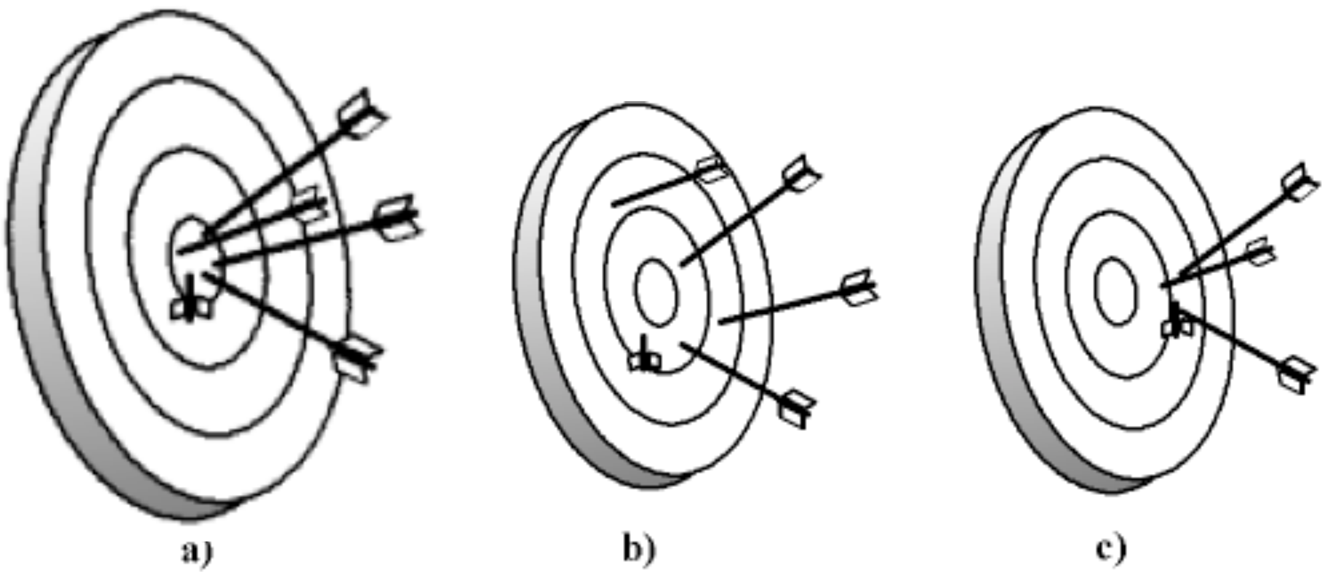
- la **précision** de la mesure Δ_1, (*resolution*);
- la **dispersion** statistique $\Delta_{2,}$ (*precision*)
- **l'erreur systématique** $\Delta_{3,}$ (*accuracy*)



© wikipedia, Erreur (métrologie)

Erreurs de mesure

- Biais, erreur systématique
- Reproductibilité, dispersion
- Précision



©wikipedia, Erreur (métrologie)

Où se glissent les erreurs?

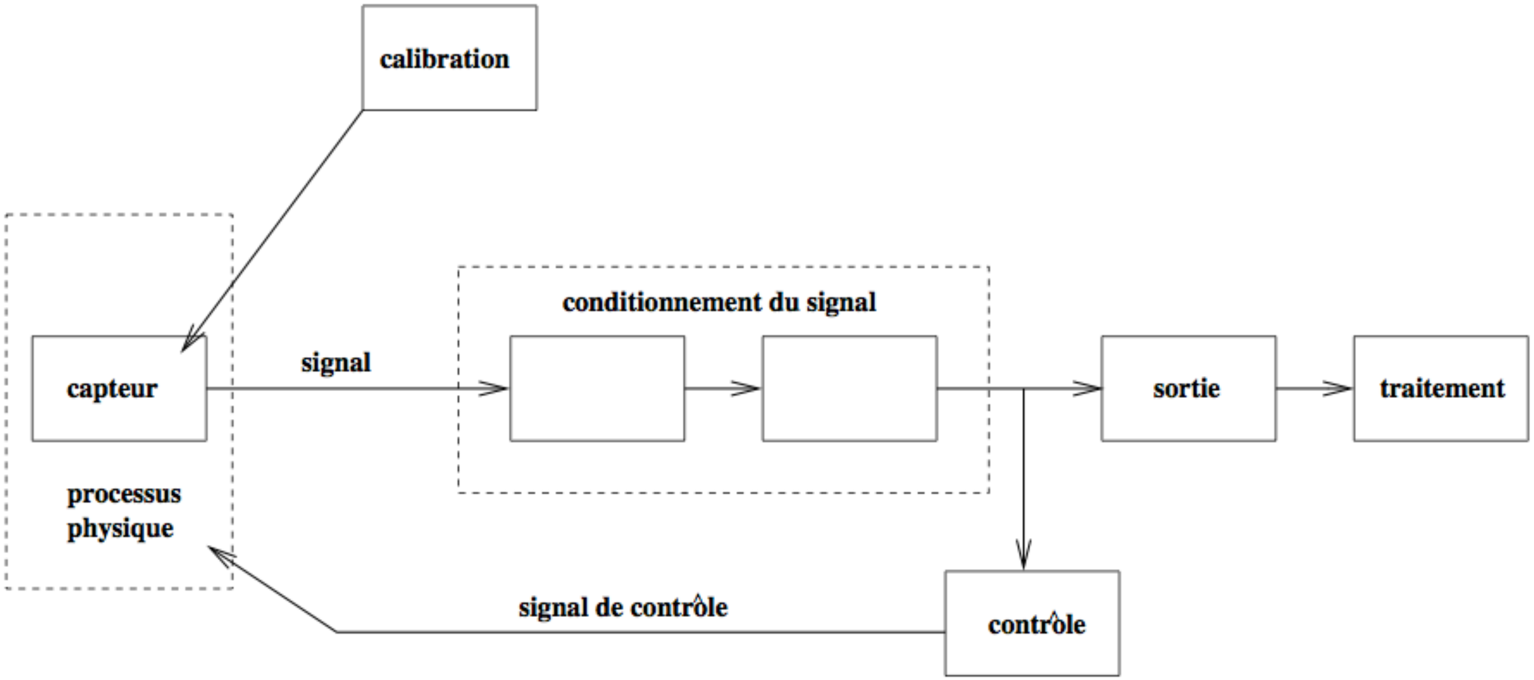


Figure 1 : Schéma général d'un système de mesure

Trois types d'erreurs en fonction de leur origine

1. Erreurs d'étalonnage
   – Erreur par rapport aux étalons primaires
   – Erreur due à la technique d'étalonnage
2. Erreur d'acquisition de données
   – Erreur due aux capteurs
   – Erreur due à l'appareil de mesure
   – Erreur due aux variables non contrôlées
3. Erreur due à l'analyse des données
   – Technique des moindres carrés
   – Courbe d'étalonnage ajustée
   – Erreur de troncature

© Cours de métrologie ENPC, Alaouis et al

Justesse et sensibilité

L'opération d'étalonnage permet aussi de déduire la justesse de l'instrument. La justesse est l'aptitude de l'instrument à fournir la vraie valeur de la grandeur physique. En entrant une valeur connue, on peut mesurer l'erreur due à l'instrument et définir la justesse par

$$e = \left(1 - \frac{|vraie\ valeur - valeur\ mesurée|}{|vraie\ valeur|}\right)x100$$

Connaissant la courbe d'étalonnage, on peut définir la sensibilité de l'instrument au voisinage d'une valeur d'entrée x_1 par la relation

$$K(x_1) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_1}$$

Sensibilité constante → Linéarité

Intervalle de confiance

$$\overline{x}_{vrai} = \overline{x}_{mes} \pm \Delta_x \quad (P\%)$$

Théorème — L'intervalle de confiance de μ au seuil de confiance α est donné par:

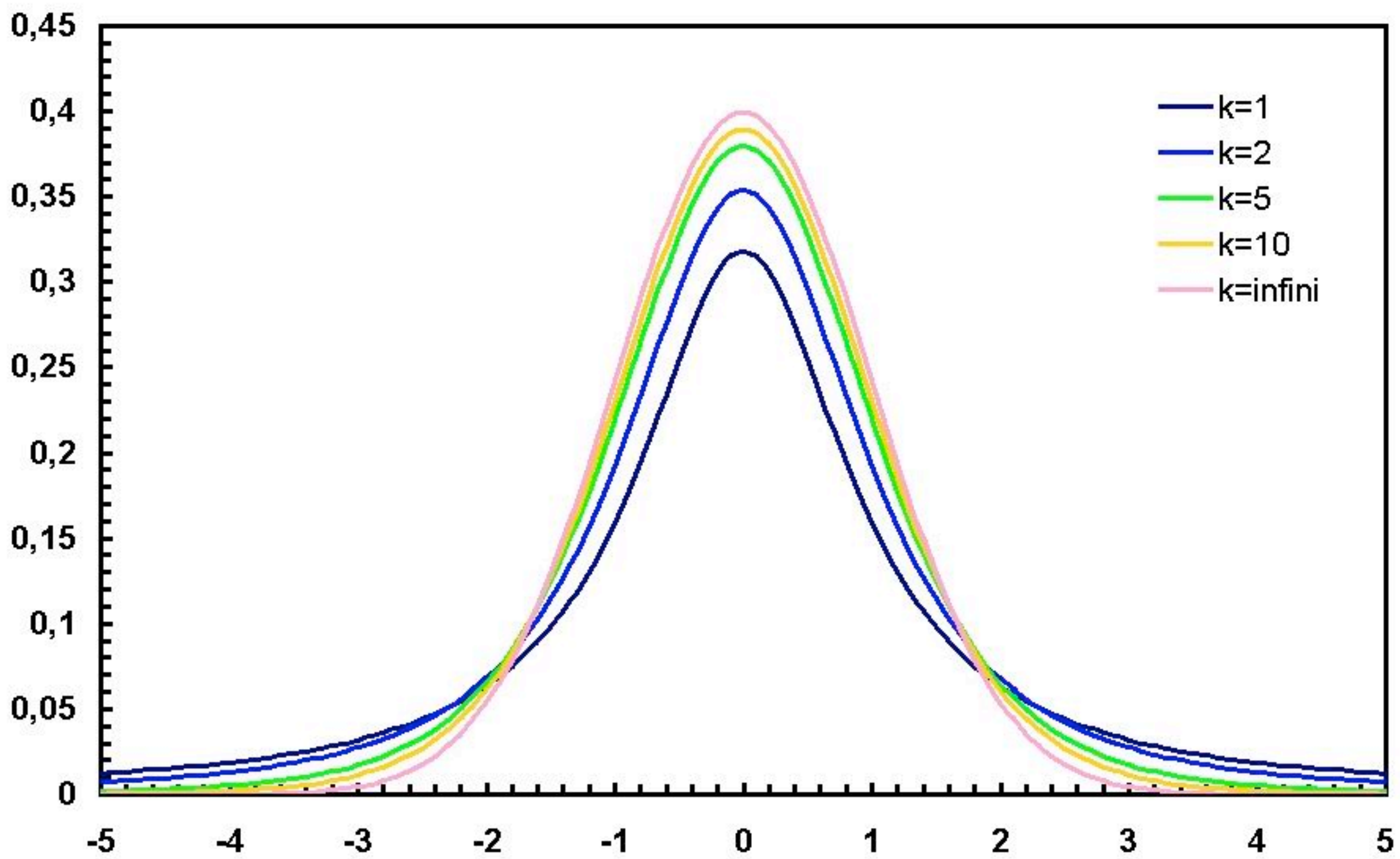
$$\left[\overline{x} - t^{n-1}_{(1-\alpha/2)} \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t^{n-1}_{(1-\alpha/2)} \frac{S}{\sqrt{n}}\right],$$

Variance de la moyenne

Facteur pour tenir compte du seuil de confiance

Distribution *t* de Student

publié en 1908 par [William Gosset] pendant qu'il travaillait à la brasserie [Guinness] à Dublin. Il lui était interdit de publier sous son propre nom, c'est pour cette raison qu'il publia sous le pseudonyme de *Student*



© wikipedia

Combinaison des erreurs

- Si une valeur mesurée *R* dépend de plusieurs facteurs : $R=f(x_1, x_2, ..., x_n)$, alors

$$\Delta_R = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial R}{\partial x_i}\Delta_{x_i}\right)^2} \quad (P\%)$$

Exemple 1 : capteur de déplacement

Exemple : un capteur de déplacement a une courbe d'étalonnage $y = KE$ avec $K = 10.10 mm/V$, $u_K = \pm 0.10 mm/V$. On cherche l'erreur autour de la valeur $E = 5.00V$ avec $u_E = \pm 0.01V$. On a alors

$$u_y = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial E} u_E\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial K} u_K\right)^2} = \pm 0.51 mm \quad (95\%)$$

Exemple 2 : mesure de force

Un instrument mesurant une force a les propriétés suivantes
Résolution : 0.25 N
Erreur de linéarité : 0.20 N
Erreur de répétabilité : 0.30 N

On a donc $e_1 = 0.20N$, $e_2 = 0.30N$, l'erreur de résolution est $e_0 = 0.125N$. L'erreur globale due à cet instrument peut être évaluée par $u = \pm\sqrt{(0.125)^2 + (0.2)^2 + (0.3)^2} = \pm 0.38N \quad (95\%)$.

Conclusions

- L'objectif : d'intégrer le calcul d'erreur dans la démarche expérimentale
  - Rappelant les concepts de base de l'erreur
  - Révisant les concepts statistiques essentiels
  - Présentant des exemples