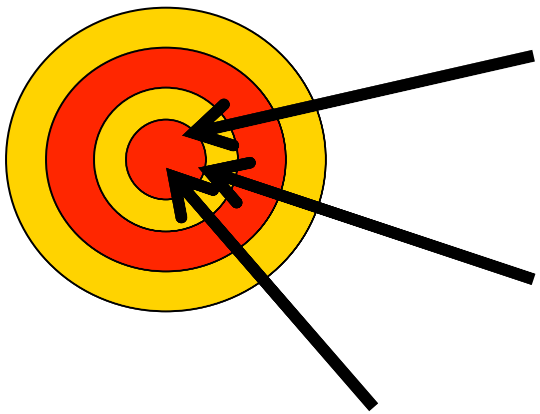
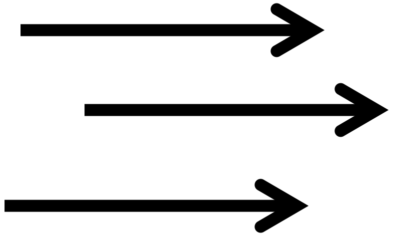
Planification Statistique des Expériences

Jean-Marie Fürbringer

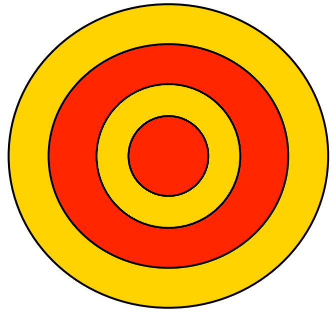


Objectifs

- Vous faire découvrir la méthodologie des plans d'expérience
- Montrer les gains du temps et d'efficacité
- Vous donner l'envie de vous en servir



Comment ?



- Stratégie
- Applicabilité
- Gain de temps et d'efficacité

Sir Ronald Fisher

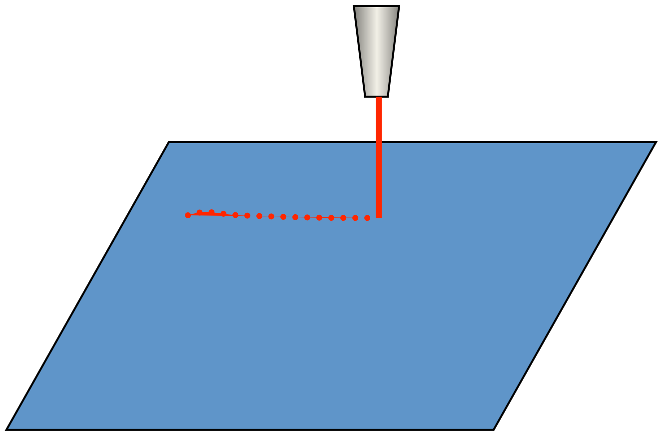
- Institut d’agriculture de Rothamsted, 1919
- Projets de recherches terminés sans conclusion claire
- Collaboration statisticien - expérimentateur
- Inventeur de l’analyse de variance (ANOVA)
- Inventeur des plans d’expériences (DOE)

Stratégie expérimentale

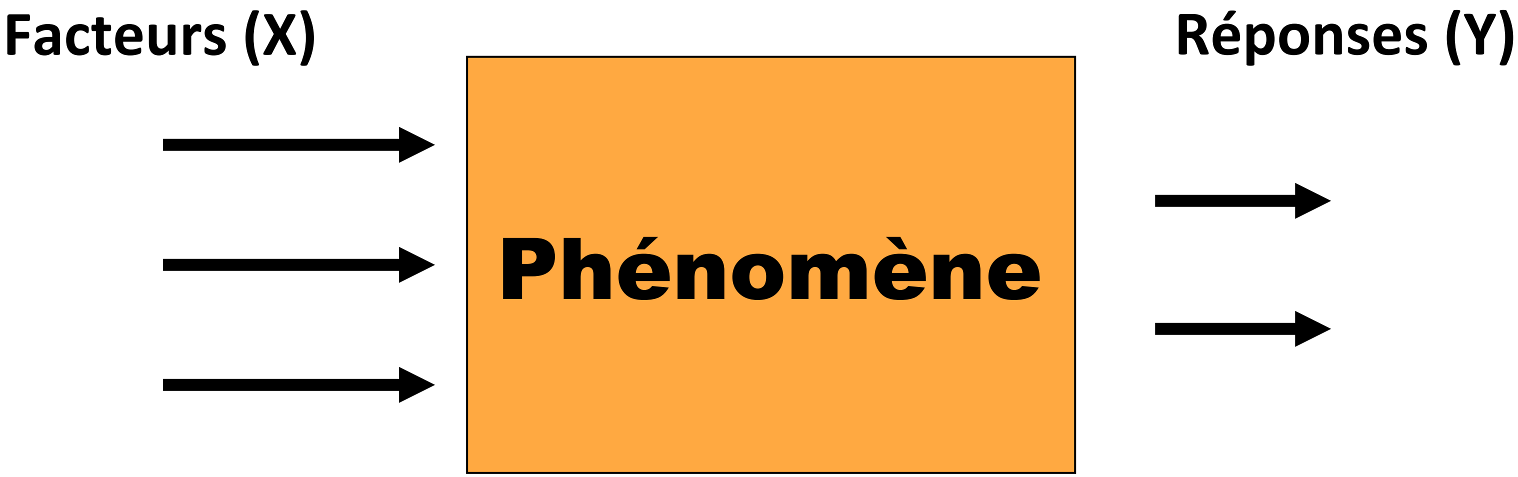
- Penser avant les expériences
- Garantir une qualité suffisante des résultats
- Flexibilité

Une situation expérimentale

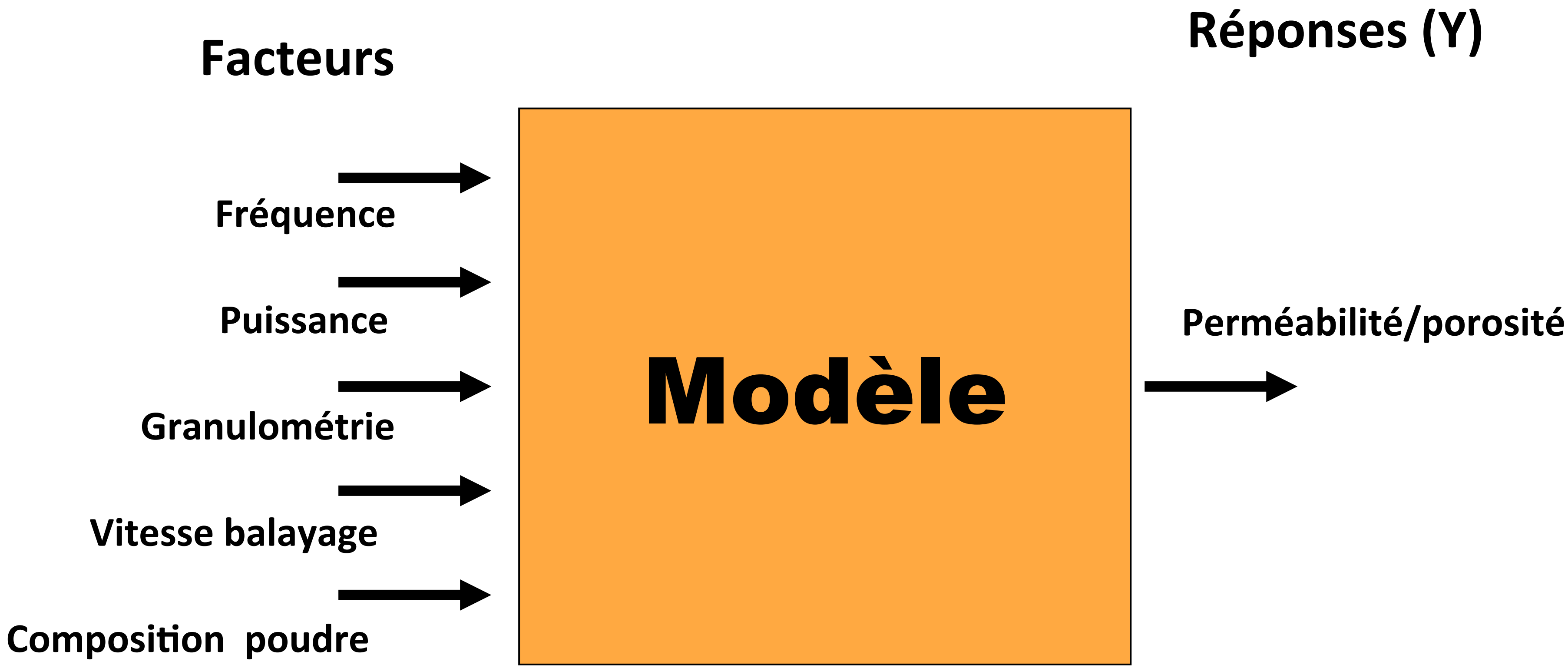
Frittage par laser



Boite noire

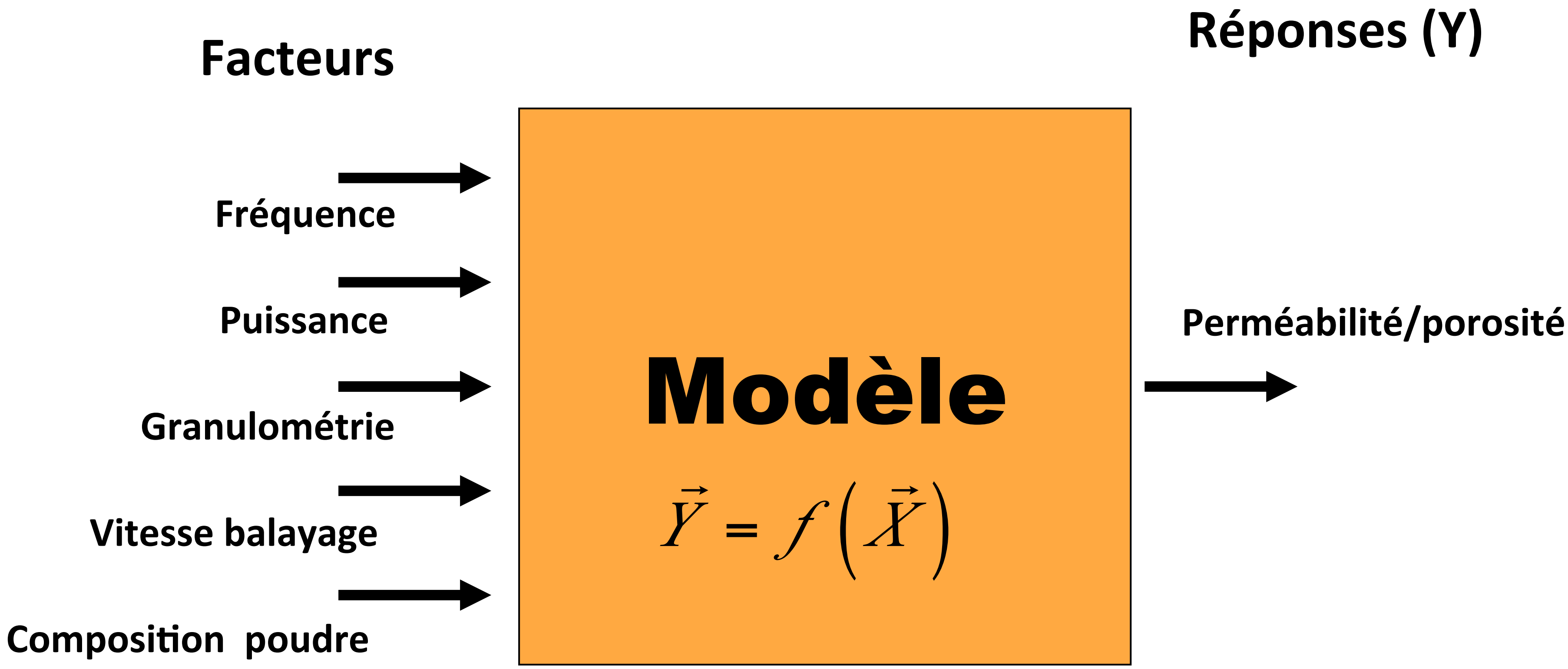


Frittage par laser



Parlons de modèles

Frittage par laser



Modèle Paramétrique de la Porosité

$$Y = f\left(\vec{X}\right)$$

$$Y = f\left(\nu, w, g, V, c_w\right)$$

ν : fréquence

w : puissance

g : taille de grain max.

V: vitesse de balayage

c_w:concentracion de tungsten

Quelle est la « forme » du modèle ?

- Théorie physique
- Littérature
- Expériences précédentes
- Empirisme

Rasoir de Ockam

=Principe de parcimonie

Développement de Taylor

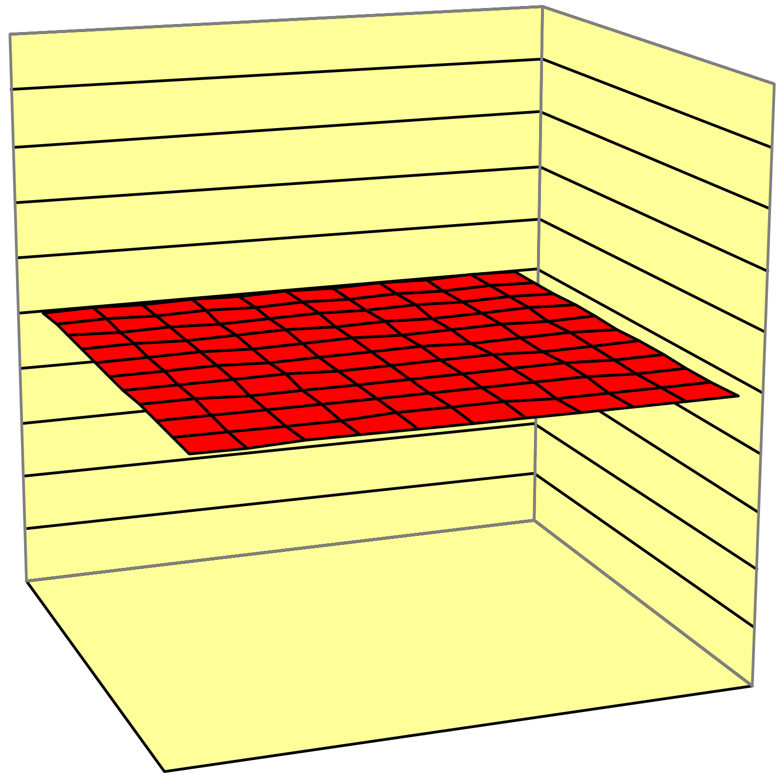
$$Y = \mathrm{f}\left(\nu, w, g, V, c_w\right)$$

$$\mathrm{Y} = \mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}}_o) + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \nu}\Delta\nu + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{w}}\Delta w + \ldots$$

$$\mathrm{Y} = \mathrm{a}_o + \mathrm{a}_1\Delta\nu + \mathrm{a}_2\Delta w + \ldots$$

Il n'y a pas d'effet :

$$y_i = a_o + e_i$$



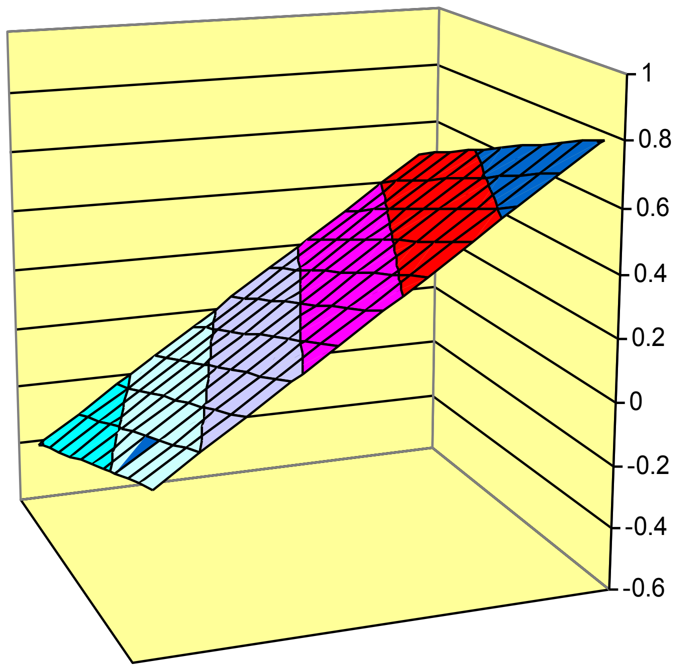
Déterminer les paramètres importants

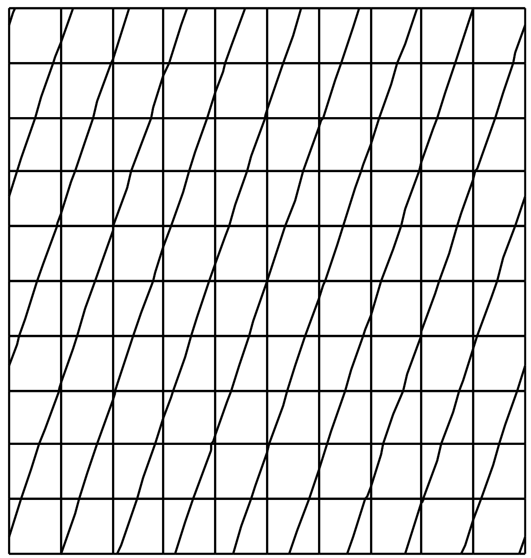
- Modèle 1er degré

$$Y = a_o + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 + \varepsilon$$

Il y a des effets directs

$$y_i = a_o + a_1 x_1 + a_2 x_2 + e_i$$





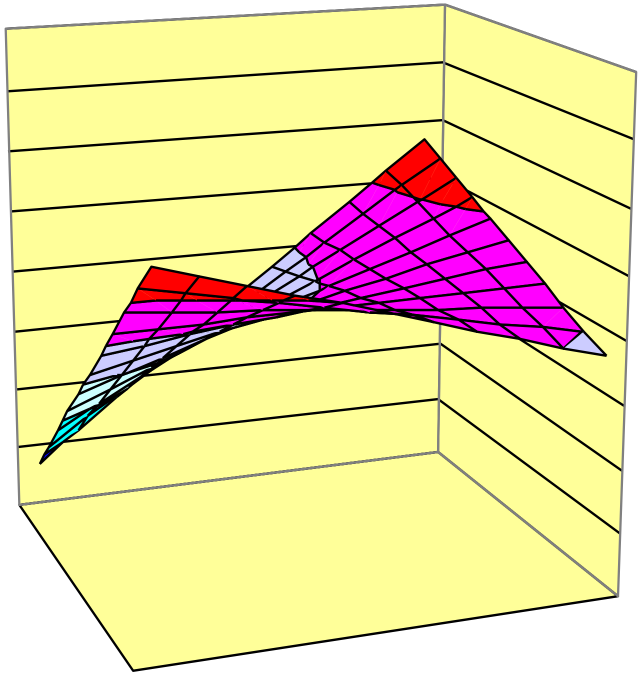
Déterminer les poids des facteurs et des interactions

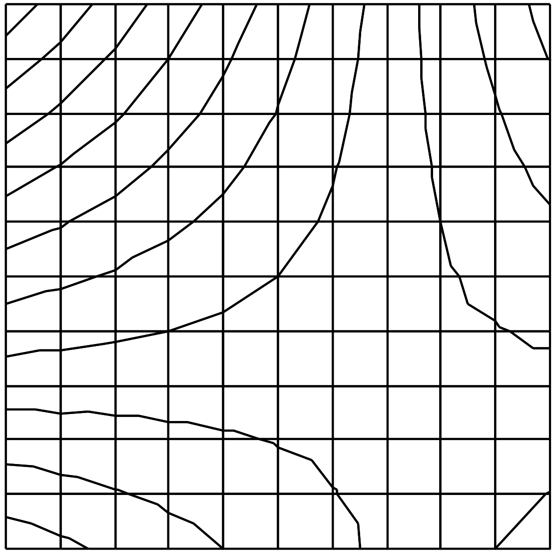
- Modèle 1er degré avec interaction

$$Y = a_o + \sum_i a_i x_i + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + ... + \varepsilon$$

Il y a des effets d'interactions

$$y_i = a_o + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{1\,2} x_1 x_2 + e_i$$





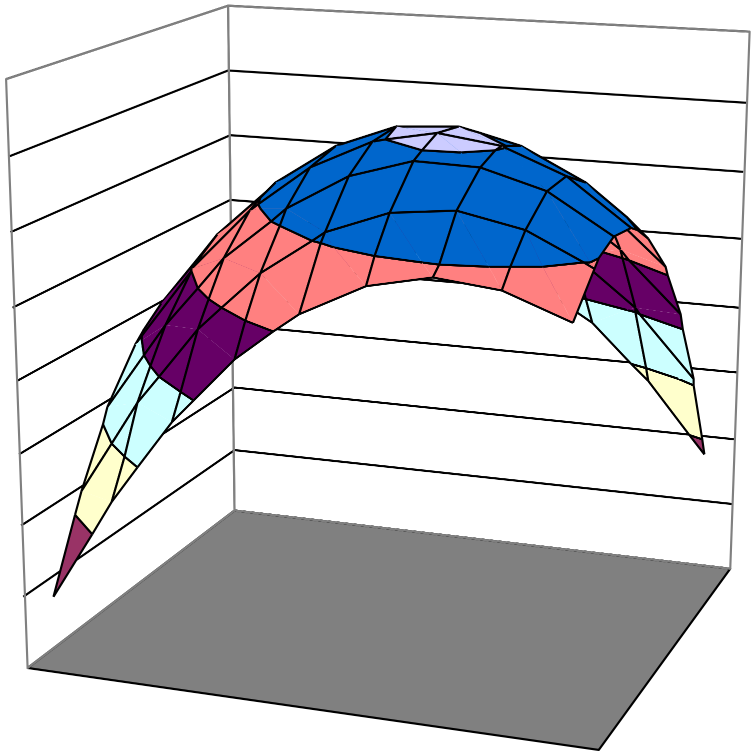
Trouver des optimaux

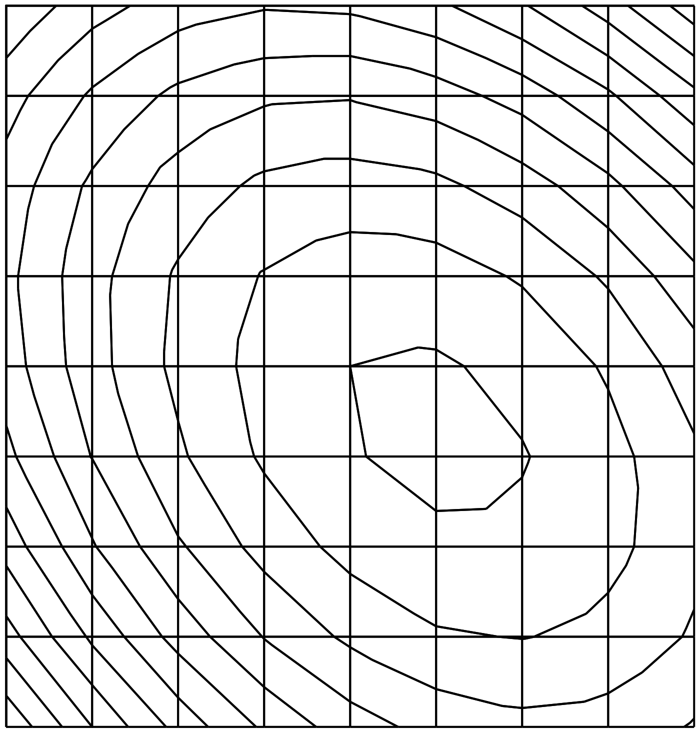
- Modèle 2ème degré

$$Y = a_o + \sum_i a_i x_i + \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j + a_{11} x_1^2 + \ldots + \varepsilon$$

Il y a des effets quadratiques

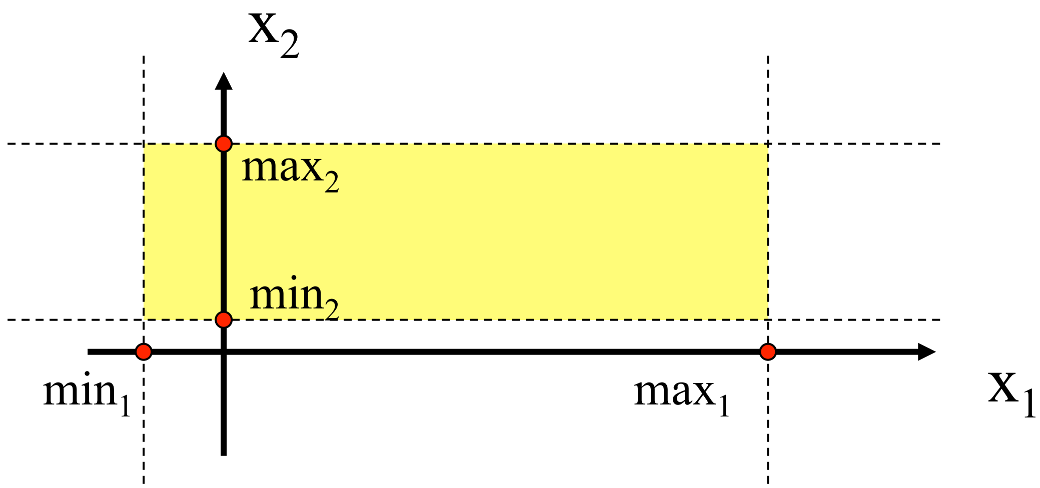
$$y_i = a_o + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + e_i$$





Parlons des expériences

Définir le domaine

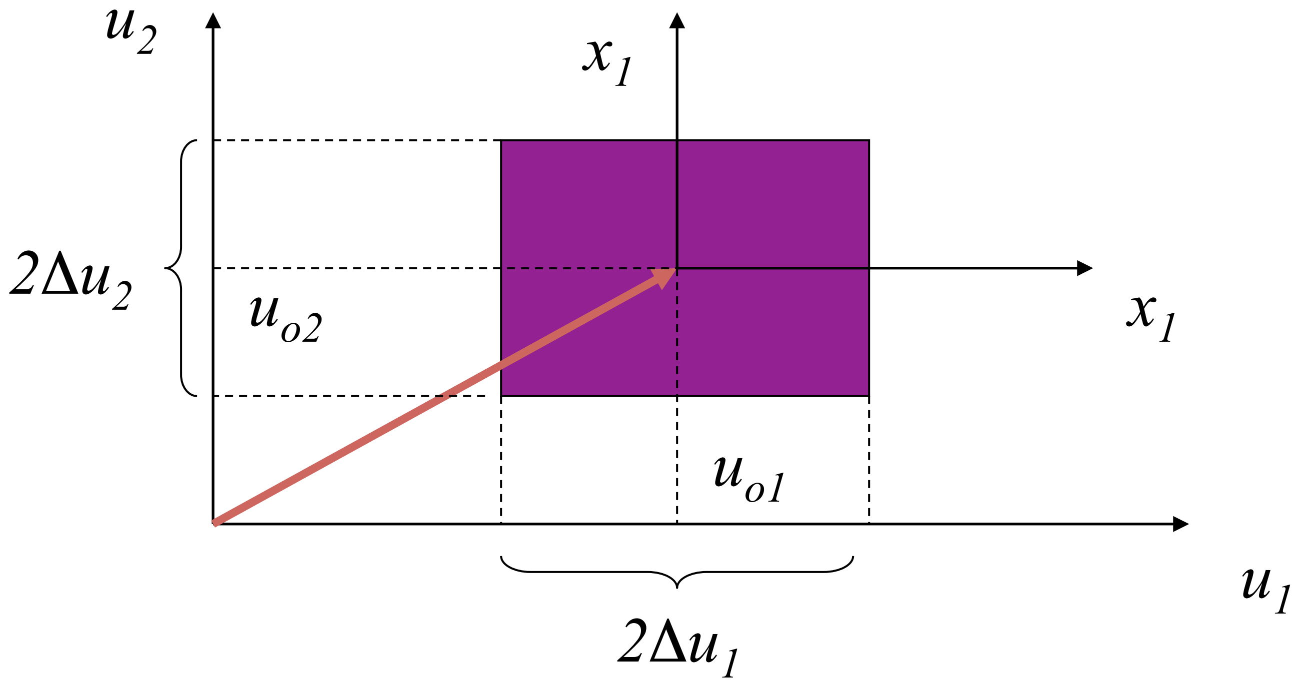


variable	ν	w	g	V	C_w
unité	Hz	watt	µm	mm/s	%
min	10^2	10	25	10	18
max	10^3	100	35	40	22

Préparez le plan

	ν	w	g	V	C_w
min	10^2	10	25	10	18
max	10^3	100	35	40	22
1					
2					
3					
4					
5					
…					

Variable normalisée



$$x_j = \frac{u_j - u_j^o}{\Delta u} \quad \Leftrightarrow \quad u_j = u_j^o + x_j \Delta u$$

Série d'expériences

$$Y_1 = a_o + a_1 x_{11} + a_2 x_{12} + a_3 x_{13} + a_4 x_{14} + a_5 x_{15} + \varepsilon_1$$

$$Y_2 = a_o + a_1 x_{21} + a_2 x_{22} + a_3 x_{23} + a_4 x_{24} + a_5 x_{25} + \varepsilon_2$$

$$\vdots$$

$$Y_i = a_o + a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + a_3 x_{i3} + a_4 x_{i4} + a_5 x_{i5} + \varepsilon_i$$

Système linéaire

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{Y}_\mathrm{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{15} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{25} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N1} & \cdots & x_{N5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{a}_\mathrm{o} \\ \mathrm{a}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{a}_\mathrm{N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{pmatrix}$$

$$\vec{Y} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon}$$

Résolution par moindres carrés

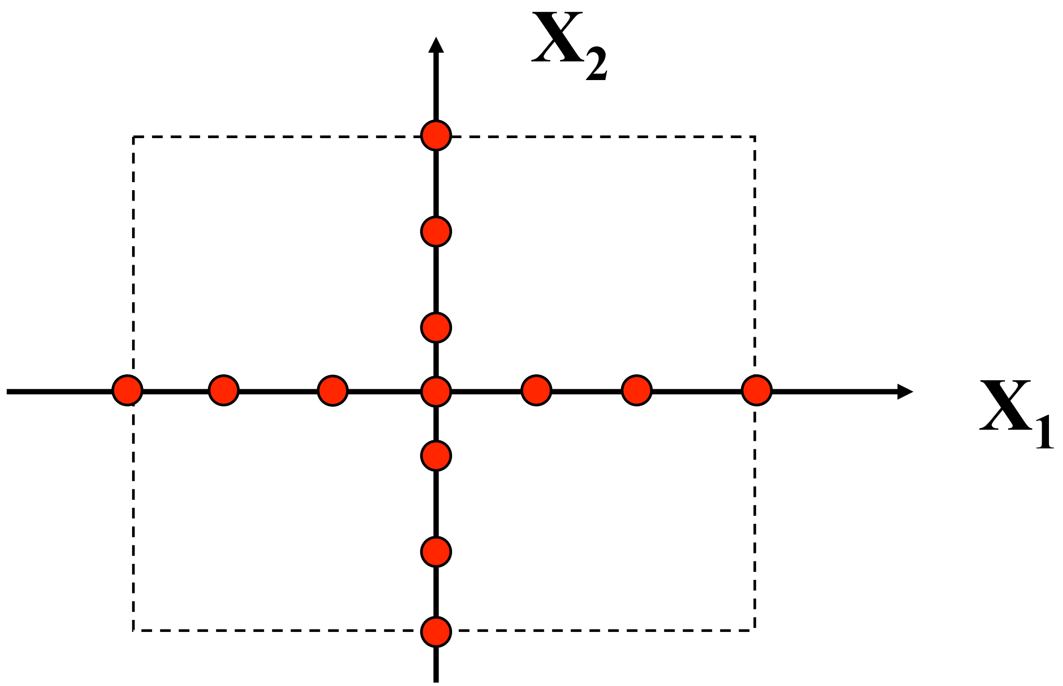
$$\vec{Y} = X\vec{\beta}$$

$$X^T\vec{Y} = X^T X\vec{\beta}$$

$$\left(X^T X\right)^{-1} X^T\vec{Y} = \vec{\beta}$$

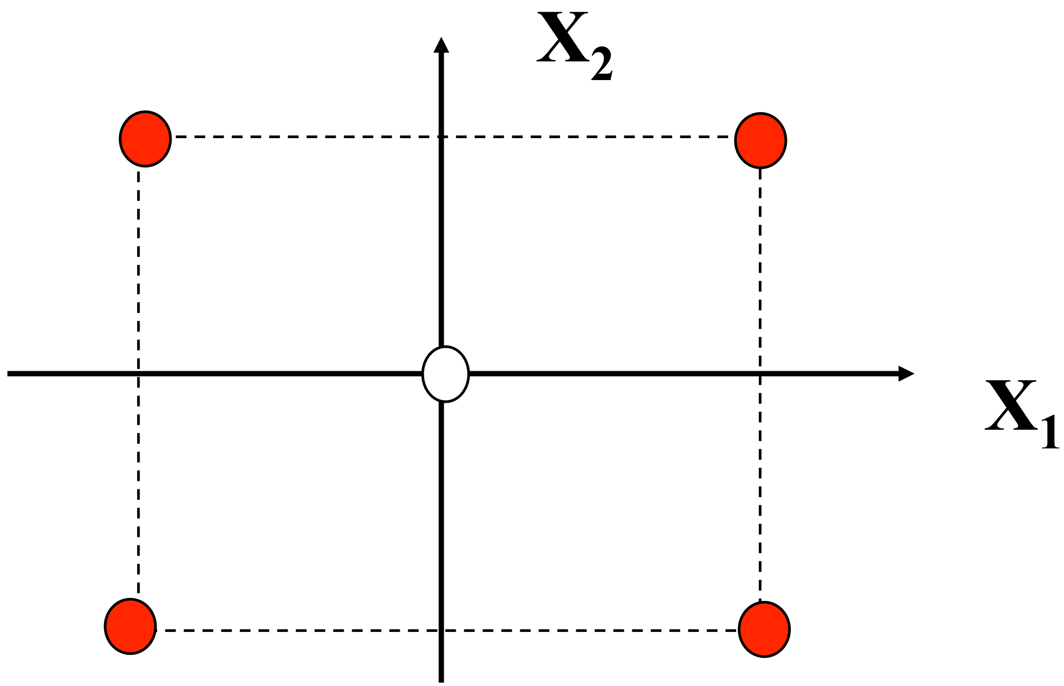
Plan Classique

- Les facteurs varient un à un
- Les interactions ne sont pas prises en compte

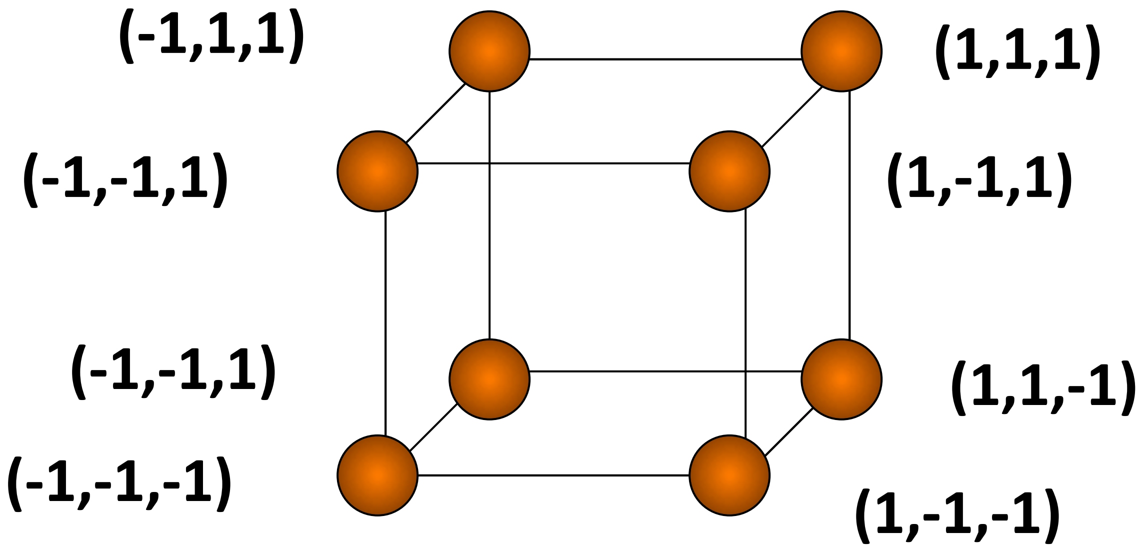


Plan Factoriel

- les niveaux des facteurs varient à chaque essai de manière structurée



Plans factoriels complets



Construction

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

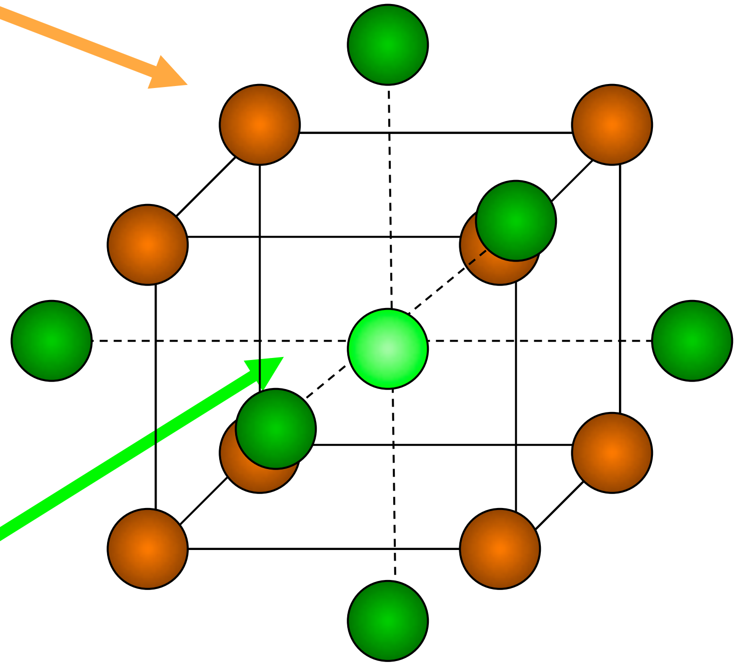
-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	1
-1	-1	-1	1	-1
-1	-1	-1	1	1
-1	-1	1	-1	-1
-1	-1	1	-1	1
-1	-1	1	1	-1
-1	-1	1	1	1
-1	1	-1	-1	-1
-1	1	-1	-1	1
-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	1
-1	1	1	-1	-1
-1	1	1	-1	1
-1	1	1	1	-1
-1	1	1	1	1

Modèles du second degré

$$y = a_0 + \sum_i a_i x_i + \sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j$$

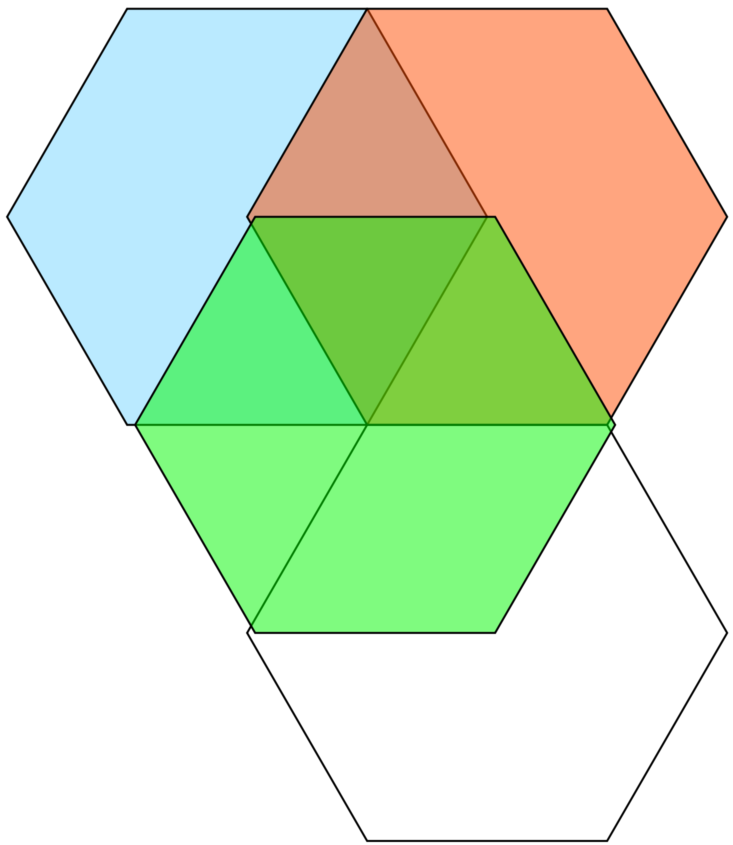
Plan Hybride

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$



Plan équiradial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$



Parlons de la qualité des résultats

Quelle est la variance des résultats quand on traite un facteur à la fois?

$$effet = m_1 - m_2$$

$$\operatorname{var}(effet) = \operatorname{var}(m_1) + \operatorname{var}(m_2)$$

$$si\ \operatorname{var}(m_1) = \operatorname{var}(m_2) = \sigma^2$$

$$\operatorname{var}(effet) = 2\sigma^2$$

Quelle est la variance quand on traite tous les facteurs à la fois?

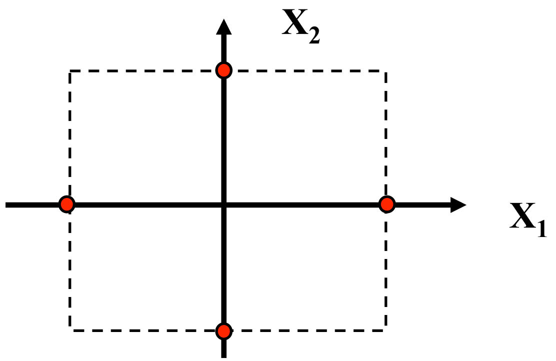
$$effet = \frac{1}{N}\sum x_{ij}m_j$$

$$\operatorname{var}(effet) = \frac{1}{N^2}\sum \left(x_{ij}\right)^2 \operatorname{var}(m_j)$$

$$si \ \operatorname{var}(m_1) = \operatorname{var}(m_j) = \sigma^2$$

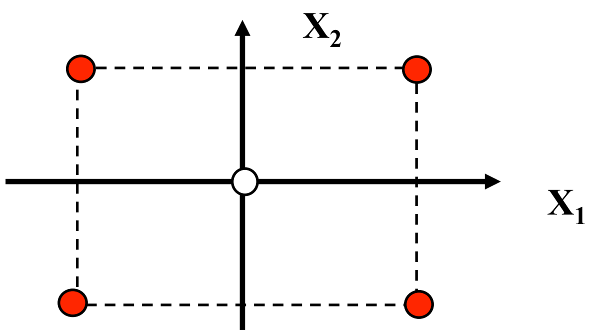
$$\operatorname{var}(effet) = \frac{1}{N^2}\sigma^2 \sum \left(x_{ij}\right)^2 = \frac{1}{N}\sigma^2$$

Comparaison des variances



$$\mathrm{var}(effet) = 2\sigma^2$$

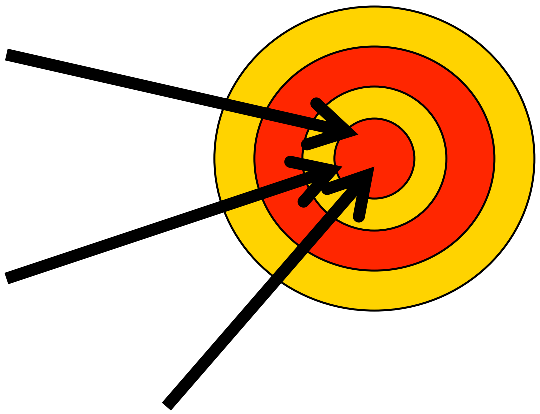
$$si\ \frac{\sigma}{\mu} = 10\% \rightarrow \frac{s}{m} = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\mu} = 14\%$$



$$\mathrm{var}(effet) = \frac{1}{N}\sigma^2$$

$$si\ \frac{\sigma}{\mu} = 10\% \rightarrow \frac{s}{m} = \frac{\sigma}{\sqrt{4}\mu} = 5\%$$

La méthodologie de planification d'expériences est :



- Stratégique
- Simple
- Permet un gain de temps et d'efficacité significatif

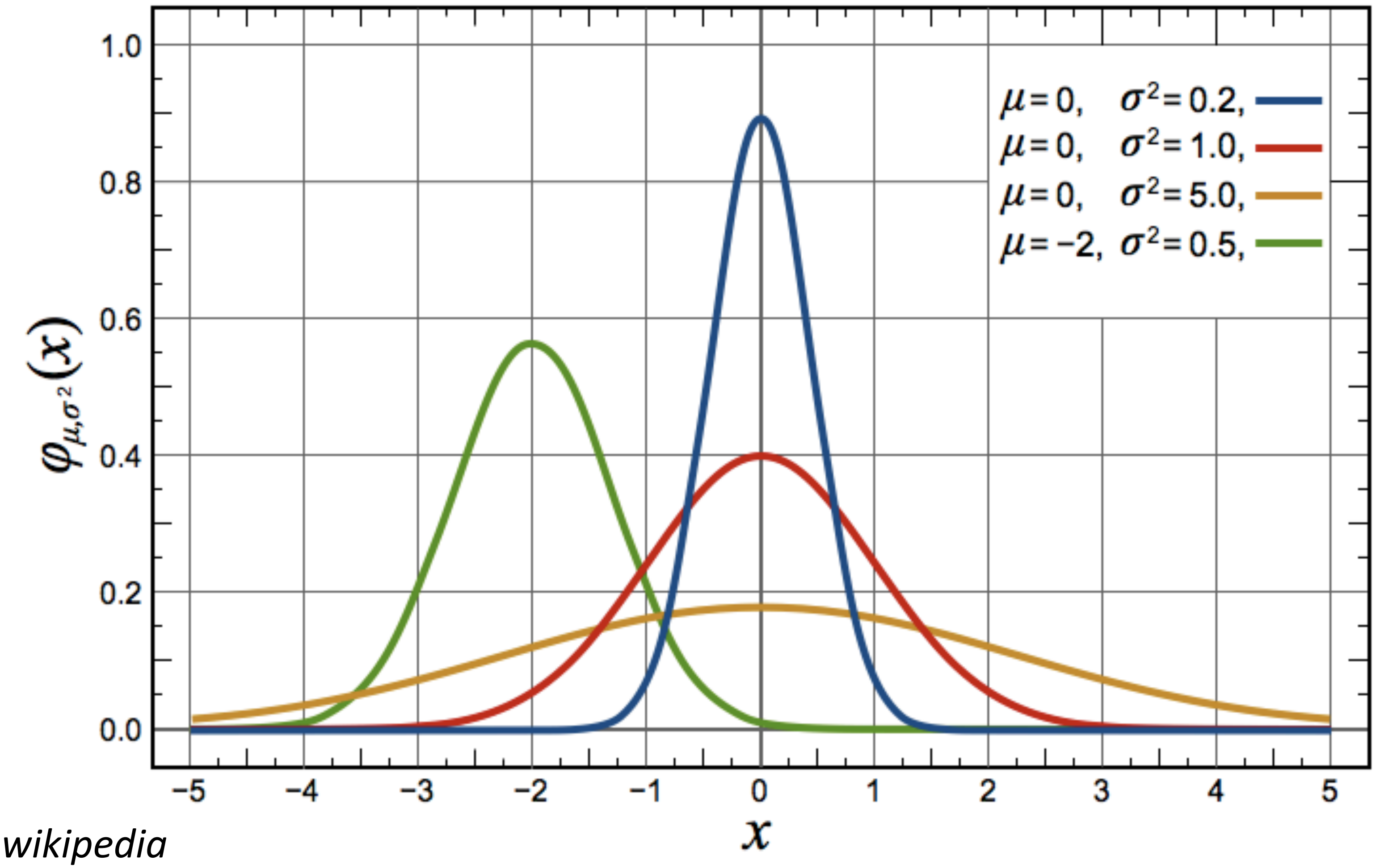
Objectifs DOE

- Garantir que les essais permettent de répondre aux questions du chercheur
- Minimiser les coûts, sans réduire la qualité des données
- Simplifier le travail d'analyse et permettre des conclusions évidentes

On doit apprendre en pratiquant;
parce que même si vous pensez que vous savez,
vous n’avez aucune certitude avant d’essayer.

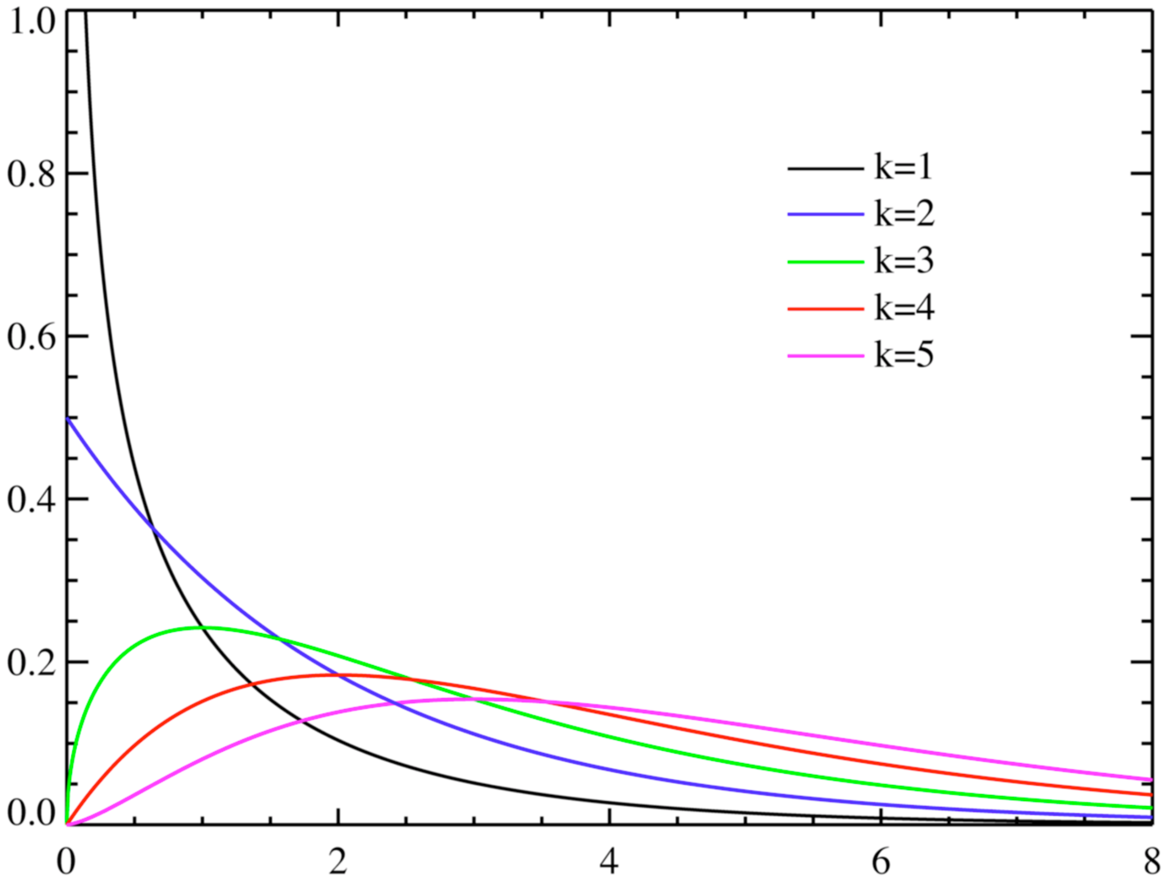
Sophocle

Distribution normale
(Abraham de Moivre en 1733, Gauss)



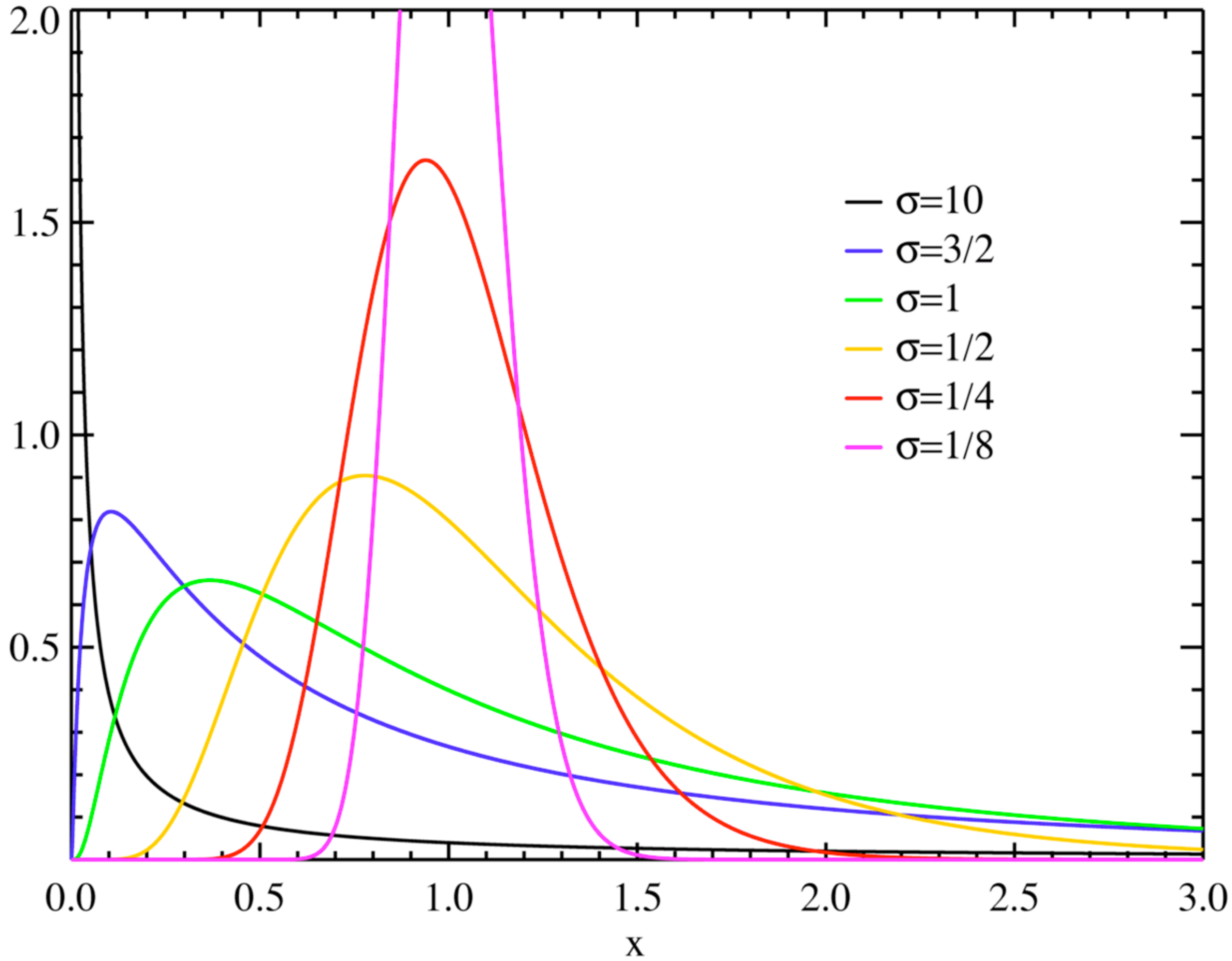
© wikipedia

Distribution χ^2



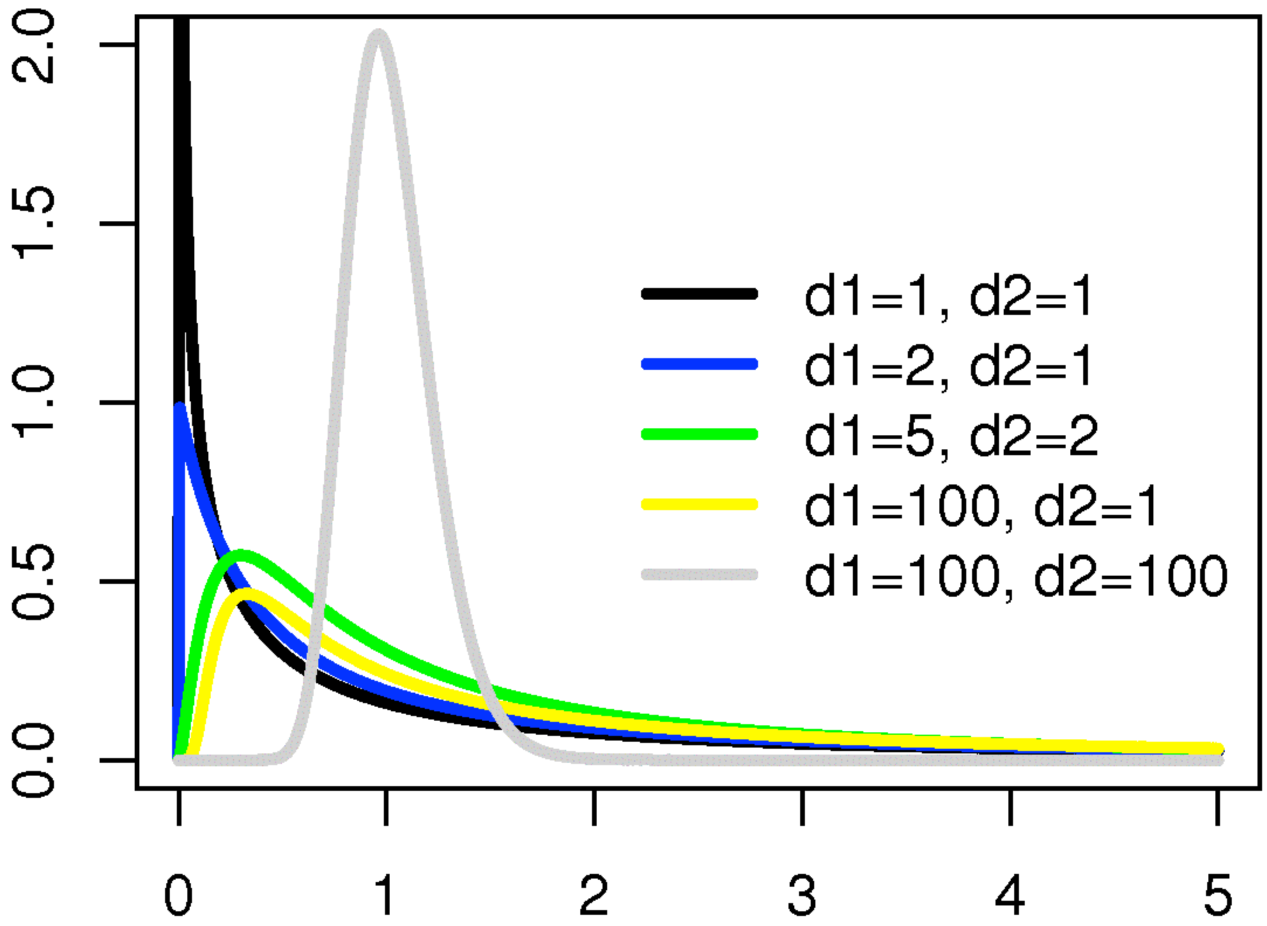
© wikipedia

Loi Lognormale



© *wikipedia*

Loi de Fisher



Approche système : composition