

TP Traitement du Signal — Théorie

Philippe Müllhaupt

12 mars 2020

Résumé

Ce document contient des rappels sur les séries de Fourier et les transformées de Fourier. L'échantillonnage et ces liens avec la représentation fréquentielle y est présenté. La matière est standard et est développée avec plus de détails dans les ouvrages en référence. Ce document sert de support à la partie pratique qui se déroule en laboratoire. La théorie est illustrée par divers exemples en relation avec la partie pratique. L'objectif est d'attirer l'attention sur les restrictions de la cadence d'échantillonnage et du nombre limité des échantillons à disposition. Une attention particulière est portée sur la détection de la fréquence d'ondes sinusoïdales échantillonnées en utilisant la transformée de Fourier discrète.

Table des matières

I	Théorie	3
1	Série de Fourier et transformée de Fourier	3
1.1	Signaux périodiques	3
1.2	Série de Fourier	3
1.2.1	Fonctions discontinues	4
1.2.2	Fonction dérivable nulle-part	5
1.3	Transformée de Fourier	6
1.3.1	Période qui tend vers l'infini	6
1.3.2	Transformée de Fourier des signaux périodiques	6
1.4	Peigne de Dirac	7

1.5	Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac	7
1.5.1	Transformée de Fourier d'un signal décalé dans le temps	8
1.5.2	TF du peigne de Dirac en se basant sur le thm. du décalage	8
1.5.3	TF du peigne de Dirac en se basant sur la série de Fourier	8
1.6	Convolution et transformée de Fourier	9
2	Fenêtrage et échantillonnage	10
2.1	Effet de la limitation dans le temps	10
2.2	Fonction gaussienne	11
2.3	Echantillonneur parfait	14
2.4	Signal à bande limitée	15
2.5	Théorème d'échantillonnage	15
2.6	Formule de reconstruction	17
2.7	Transformée en Z	18
2.8	Transformée de Fourier et transformée de Laplace	19
2.9	Transformée de Fourier discrète	19
II	Expériences	20
3	Expériences numériques avec des séries de Fourier	20
4	Expériences numériques avec un sinus échantillonné	22
4.1	Résolution spectrale (quantum fréquentiel)	23
4.1.1	Fréquence maximale détectable	23
4.1.2	Module du spectre discret	23
4.2	Maximum du module des coefficients de la TFD	24
4.3	Battelements et repliement spectral	25
5	Un paradoxe ?	27
6	Annexe : fichier <code>experiences.m</code>	30
7	Annexe : Tables	35

Première partie

Théorie

1 Série de Fourier et transformée de Fourier

Les fréquences fondamentales jouent un rôle prépondérant dans les systèmes dynamiques et on rencontre dans beaucoup de systèmes des phénomènes de résonance caractéristique. Ces phénomènes sont mieux compris lorsqu'ils sont analysés dans le domaine fréquentiel. L'analyse de Fourier permet d'introduire les harmoniques et d'effectuer une analyse de celles-ci. On distingue la décomposition en série de Fourier lorsqu'on examine les signaux périodiques. La transformée de Fourier est alors vue comme un cas particulier lorsque la période tend vers l'infini. Ainsi un signal avec des propriétés convenables, afin de garantir l'existence et la convergence des intégrales de définition, admet une transformée de Fourier.

1.1 Signaux périodiques

Soit $\{x(t)\}$ un signal.

Définition 1.1. (SIGNAL PÉRIODIQUE) *Le signal $\{x(t)\}$ est périodique de période T , si et seulement si*

$$x(t + kT) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Cette définition signifie que le signal comporte une répétition périodique (indice $k \in \mathbb{Z}$) et qu'il est suffisant de le connaître sur une durée T . Il est important de souligner que la connaissance du signal peut commencer à n'importe quel instant t , ainsi l'intervalle de temps nécessaire pour la détermination du signal complet est $[t, t + T[$, quel que soit $t \in \mathbb{R}$.

1.2 Série de Fourier

La plupart des signaux périodiques admettent une décomposition en harmoniques successives appelées série de Fourier. Des précautions sont nécessaires en ce qui concerne le type de continuité

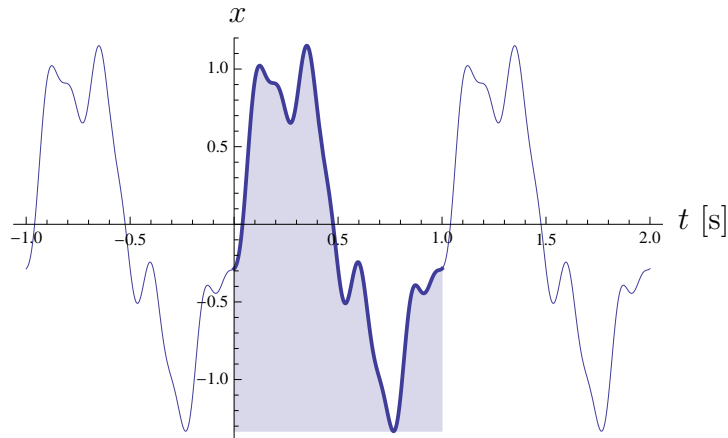


FIGURE 1 – Un signal périodique comporte une partie qui se répète à intervalles réguliers. Le plus petit intervalle pour lequel ceci se produit est la période T .

afin que la série de Fourier reflète fidèlement le signal de départ. Lorsque le signal est discontinu, il est également possible que la série de Fourier converge (selon le type de convergence tel que la convergence presque partout, celle en moyenne, absolue, etc.), mais ce n'est pas toujours le cas.

D'autres phénomènes surprenants peuvent avoir lieu. On sait qu'un sinus ou cosinus est dérivable une infinité de fois. Ils sont parfaitement réguliers. Ainsi, lorsqu'on somme un nombre fini de sinus, le signal résultant conserve cette propriété d'être différentiable une infinité de fois. Par contre, lorsqu'une somme infinie de sinus est effectuée, il est possible de perdre la propriété de dérivabilité (cf. les signaux discontinus ayant une série de Fourier convergente). Et il peut même y avoir des cas encore plus sévères où toute la régularité est perdue. Des sommes infinies de sinus donnent une fonction dérivable en aucun point.

Définition 1.2. (SÉRIE DE FOURIER) Soit $\{x(t)\}$ un signal périodique de période T . Sa série de Fourier est définie par les formules

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

avec $c_k \in \mathbb{C}$ des coefficients complexes donnés par

$$c_k = \int_{t=0}^T x(t) e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} dt$$

1.2.1 Fonctions discontinues

Un grand nombre d'exemples de fonctions périodiques discontinues sont représentables par des séries de Fourier convergentes. Nous donnons deux exemples, une onde carrée et une onde triangulaire.

Le train d'ondes carré. La série de Fourier correspondante est

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n] \sin(2\pi n t)$$

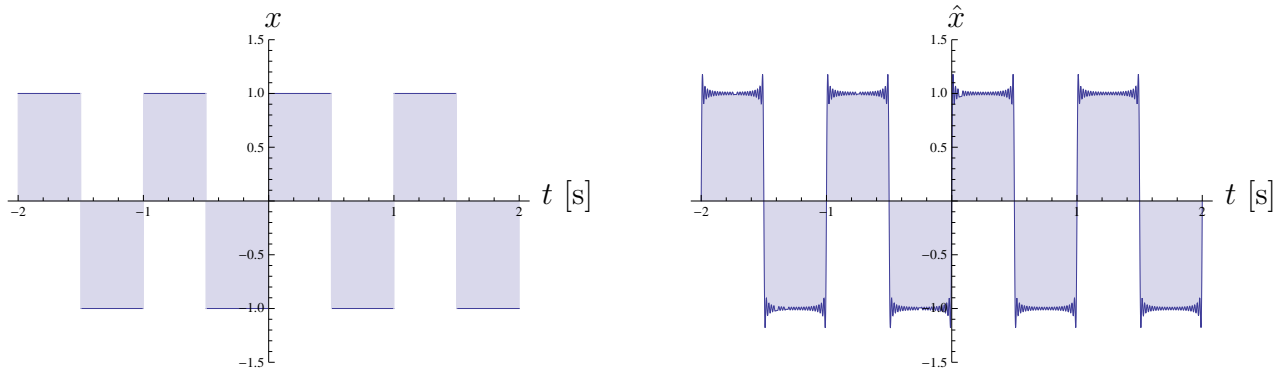


FIGURE 2 – A gauche, le signal, et à droite, la somme $\sum_{n=0}^{50} \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n] \sin(2\pi n t)$, c.-à-d. celle obtenue à partir des 50 premiers coefficients de la série de Fourier. On illustre le phénomène de Gibbs qui fait apparaître des oscillations aux points de discontinuité de la fonction d'origine.

Le train d'ondes triangulaire. La série de Fourier associée est

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(n t)$$

1.2.2 Fonction dérivable nulle-part

Weierstrass a mis en évidence des classes de fonctions ayant des séries de Fourier parfaitement bien définies mais dérivables en aucun point. Un exemple est la fonction

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi t)$$

Avec les paramètres $b = \frac{1}{2}$ et $a = 3$ la fonction devient "fractale" bien que chaque fonction de base apparaissant dans chacun des termes de la série soit un cosinus (le cosinus est parfaitement régulier).

1.3 Transformée de Fourier

1.3.1 Période qui tend vers l'infini

Lorsque la période T d'un signal périodique $\{x(t)\}$ augmente, les contributions x_n à la série de Fourier interviennent à des fréquences de plus en plus rapprochées les unes des autres. Un signal non périodique peut être interprété comme un signal périodique de période infinie. Dans un tel cas, les contributions fréquentielles ne sont plus séparées les unes des autres et la série (de Fourier) fait place à une intégrale (car les contributions fréquentielles sont espacées infiniment près les unes des autres).

Définition 1.3. (TRANSFORMÉE DE FOURIER) *La transformée de Fourier $\{X(f)\}$ du signal $\{x(t)\}$ est définie par*

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

1.3.2 Transformée de Fourier des signaux périodiques

La transformée de Fourier d'un signal périodique de période T est non-nulle uniquement aux fréquences n/T conformément au résultat suivant.

Théorème 1.1. (TF DE SIGNAUX PÉRIODIQUES ET SÉRIE DE FOURIER) *Si $\{x(t)\}$ est périodique de période T alors la transformée de Fourier $\{X(f)\}$ est non nulle uniquement aux fréquences $\frac{n}{T}$ et s'exprime à partir des coefficients x_n de sa série de Fourier par la formule*

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \delta\left(f - n \frac{1}{T}\right)$$

Démonstration:

En partant de la définition de la transformée de Fourier et en y introduisant la série de Fourier du signal périodique, nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t} \right) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f - \frac{n}{T})t} dt \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \end{aligned}$$

où nous avons utilisés

$$1 \leftrightarrow \delta(f)$$
$$\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} dt$$

CQFD.

1.4 Peigne de Dirac

Définition 1.4. *Un peigne de Dirac est une série d'impulsions de Dirac équispaciées.*

$$\delta_T(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

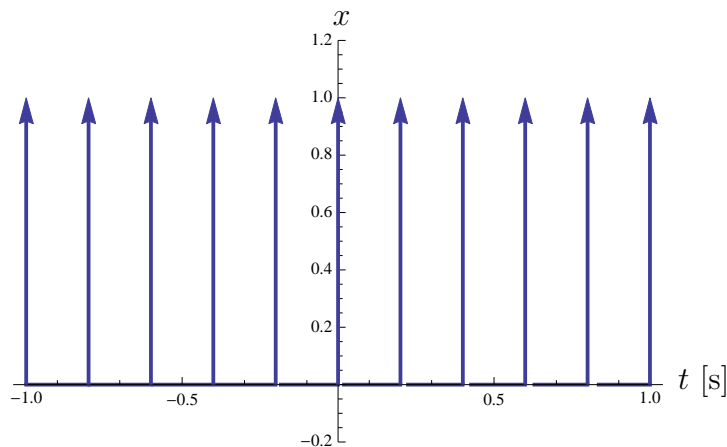


FIGURE 3 – Un peigne de Dirac est une succession d'impulsions de Dirac équispaciées

1.5 Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

La transformée d'un peigne de Dirac est à nouveau un peigne de Dirac mais dont l'espacement est inversement proportionnel à l'espacement du peigne de Dirac initial. Pour obtenir l'expression de cette transformée on utilise le théorème du décalage. Le résultat de cette section est utile lorsqu'il est associé à la convolution. On explique ainsi la périodicité de la représentation fréquentielle d'un signal échantillonné. Ceci fournit un autre regard sur le résultat déjà obtenu à l'aide d'un calcul direct de la transformée de Fourier associée à la série de Fourier d'un signal périodique.

1.5.1 Transformée de Fourier d'un signal décalé dans le temps

Soit $\{g(t)\}$ un signal et $\{G(f)\}$ sa transformée de Fourier. Déterminons la relation $\{G(f)\}$ et la transformée de Fourier de $\{g(t - \alpha)\}$.

Théorème 1.2. (DU DÉCALAGE)

$$g(t - \alpha) \leftrightarrow e^{-j2\pi f \alpha} G(f)$$

Démonstration :

On applique la définition de la transformée de Fourier ainsi que le changement de variable $\bar{t} = t - \alpha$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \alpha) e^{-j2\pi f t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\bar{t}) e^{-j2\pi f(\bar{t} + \alpha)} d\bar{t} = \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(\bar{t}) e^{-j2\pi f \bar{t}} e^{-j2\pi f \alpha} d\bar{t} &= e^{-j2\pi f \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\bar{t}) e^{-j2\pi f \bar{t}} d\bar{t} = e^{-j2\pi f \alpha} G(f) \end{aligned} \quad (1)$$

CQFD.

En ce qui concerne le peigne de Dirac, il y a deux façons de déterminer sa transformée de Fourier, soit en invoquant le thm. du décalage, soit en considérant que c'est un signal périodique et en évaluant sa série de Fourier.

1.5.2 TF du peigne de Dirac en se basant sur le thm. du décalage

Théorème 1.3. (TF DU PEIGNE DE DIRAC (1))

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi kT} \quad (2)$$

Démonstration : Ceci résulte de

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

et de l'application de (1).

CQFD.

1.5.3 TF du peigne de Dirac en se basant sur la série de Fourier

Théorème 1.4. (TF DU PEIGNE DE DIRAC (2))

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - k \frac{1}{T}\right) \quad (3)$$

Démonstration : Les coefficients de la série de Fourier du signal périodique de période T que représente le peigne de Dirac $\{\delta_T(t)\}$ sont donnés par

$$\begin{aligned}
 c_k &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-j \frac{2\pi}{T} t} dt \\
 &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j \frac{2\pi}{T} t} dt \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{4}$$

de telle sorte que la série de Fourier devienne

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j \frac{2\pi k}{T} t}$$

CQFD.

1.6 Convolution et transformée de Fourier

Définition 1.5. (CONVOLUTION)

$$f * g = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

Ce produit admet un élément neutre.

Théorème 1.5. (ÉLÉMENT NEUTRE POUR LA CONVOLUTION) *L'impulsion de Dirac est l'élément neutre pour la convolution*

$$g(t) * \delta(t) = g(t) \quad \forall g(t)$$

Démonstration: $(g * \delta)(t) = \int_0^t g(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = g(t)$ CQFD.

Ce produit est commutatif et associatif

Théorème 1.6. (COMMUTATIVITÉ ET ASSOCIATIVITÉ DE LA CONVOLUTION)

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g * h) = (f * g) * h$

dont la démonstration est un exercice de changement de variables. On peut également montrer qu'il n'y a pas de diviseur de zero (Th. Titchmarsh) et donc les signaux constituent les éléments d'un anneau intègre dont le produit est la convolution et l'addition est la somme des signaux.

Théorème 1.7. (PRODUIT DE CONVOLUTION ET PRODUIT SIMPLE DES TRANSFORMÉES) *Il existe une correspondance entre le produit de convolution dans le domaine temporel et le produit simple des transformations de Fourier dans le domaine fréquentiel.*

$$\begin{aligned} f * g &\rightarrow F(f) \cdot G(f) \\ f(t) \cdot g(t) &\leftarrow F * G \end{aligned}$$

2 Fenêtrage et échantillonnage

En pratique, nous aurons affaire à un nombre limité d'échantillons du signal. Une fonction du temps est convertie en suite de nombre par le système d'acquisition (échantillonnage) et stocké dans l'ordinateur en tant qu'un ensemble fini de valeurs. Nous aurons affaire ainsi à la restriction du signal d'origine par une fenêtre. Le signal est non seulement discrétisé dans le temps mais également limité dans le temps.

2.1 Effet de la limitation dans le temps

La limitation dans le temps d'un signal a une conséquence importante sur sa transformée de Fourier. Soit $f(t)$ le signal illimité dans le temps et soit $g(t)$ le signal limité entre $-\frac{T}{2}$ et $\frac{T}{2}$.

$$g(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{T}{2} \\ f(t) & |t| \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Soit la fenêtre rectangulaire

$$r_T(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{T}{2} \\ 1 & |t| \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Calculons la transformée de Fourier de la fenêtre rectangulaire

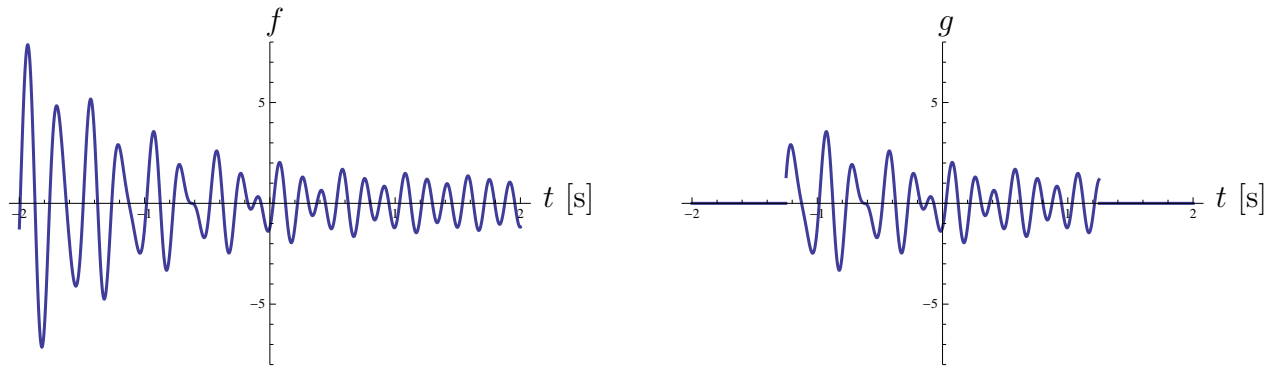


FIGURE 4 – Le signal $\{f(t)\}$ (à gauche) et sa restriction sur un intervalle $\{g(t)\}$ (à droite).

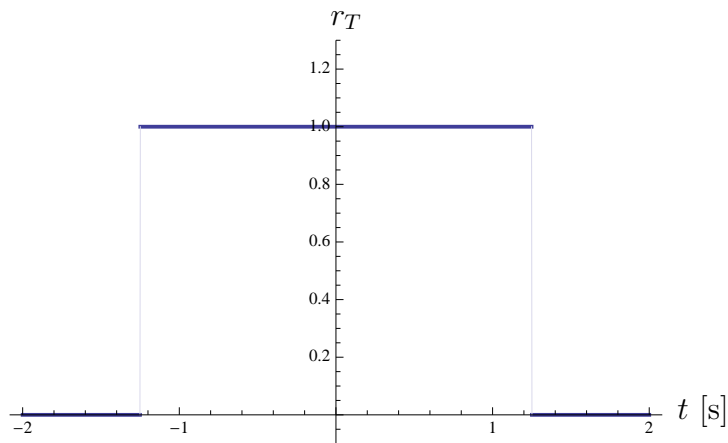


FIGURE 5 – La fonction $r_T(t)$ est une fonction symétrique par rapport à l'origine égale à un sur un intervalle de durée T et nulle partout ailleurs.

$$\begin{aligned}
 R(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} r(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft} dt = -\frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
 &= -\frac{1}{j2\pi f} \left(e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} - e^{+j2\pi f \frac{T}{2}} \right) = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T \operatorname{sinc}(f T)
 \end{aligned}$$

2.2 Fonction gaussienne

La fonction Gaussienne préserve sa forme par transformée de Fourier mais "sa largeur" est en correspondance inverse après transformée.

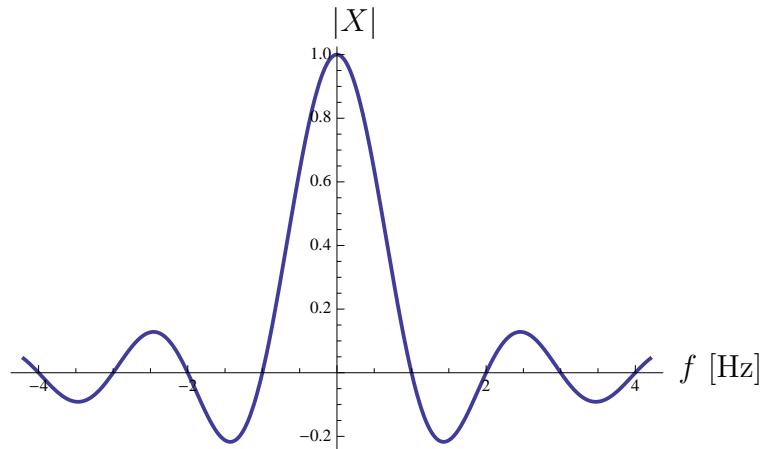


FIGURE 6 – La fonction sinus cardinal est la transformée de Fourier d’une signal rectangulaire. Elle est définie comme $\text{sinc}(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$.

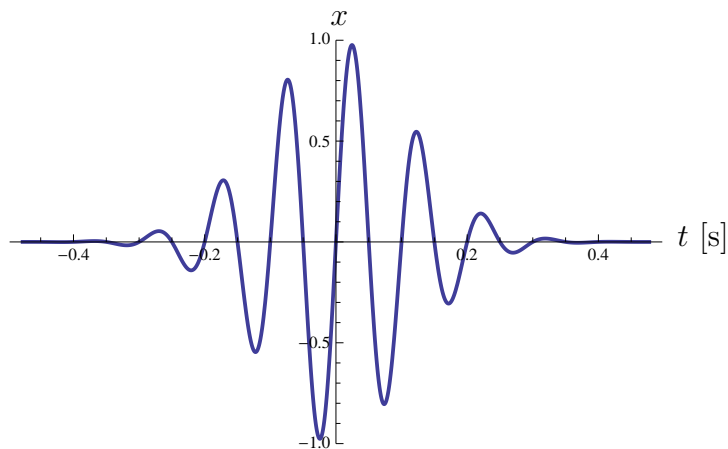


FIGURE 7 – Le signal $e^{-(2\pi t)^2} \sin(2\pi 10t)$ est un sinus de fréquence 10 modulé par une gaussienne.

Théorème 2.1. (TRANSFORMÉE DE FOURIER D’UNE GAUSSIENNE)

$$e^{-at^2} \leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{\pi^2 f^2}{4a}}}{\sqrt{a}}$$

Comme illustration, considérons le signal $x(t) = e^{-(2\pi t)^2} \sin(2\pi 10t)$ qui est représenté à la figure 7. Le signal $x(t)$ étant le produit d’un sinus par une fonction gaussienne, la transformée de Fourier $X(f)$ sera la convolution de la transformée du sinus (deux impulsions de Dirac en -10 et 10), autrement dit

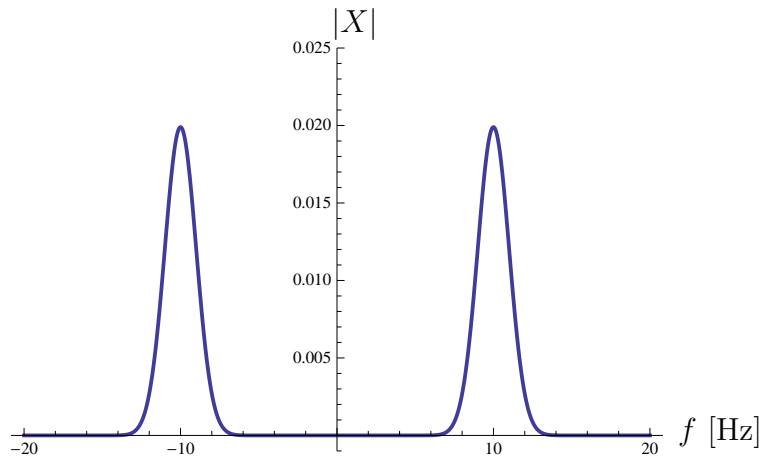


FIGURE 8 – Le module de la transformée de Fourier $X(f)$ du signal $\sin(2\pi 10t)e^{-(2\pi t)^2}$. On constate les deux lobes à la fréquence 10 et -10 correspondants aux Diracs de la transformée du sinus. Les Diracs ont été "étalés" à cause de la multiplication par la Gaussienne. La gaussienne a fenêtré le sinus et localisé celui-ci dans le temps. La conséquence est une perte de localisation dans le domaine des fréquences.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sin(2\pi 10t) \cdot e^{-(2\pi t)^2} \\
 \updownarrow \quad \updownarrow \\
 X(f) &= \left(-j\frac{1}{2}\delta(f-10) + j\frac{1}{2}\delta(f+10) \right) * \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{f^2}{4}} \\
 &= -\frac{je^{-\frac{f^2}{4}-25}\sinh(5f)}{2\sqrt{\pi}}
 \end{aligned}$$

On peut comparer graphiquement le résultat au fenêtrage direct du sinus par la fenêtre rectangulaire.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sin(2\pi 10t) \cdot r_{0.8/2/\pi}(t) \\
 \updownarrow \quad \updownarrow \\
 X(f) &= \left[-j\frac{1}{2}\delta(f-10) + j\frac{1}{2}\delta(f+10) \right] * \frac{0.8}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{0.8}{2\pi}f\right) \\
 &= -j\frac{0.8}{4\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{0.8}{2\pi}(f-10)\right) + j\frac{0.8}{4\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{0.8}{2\pi}(f+10)\right)
 \end{aligned}$$

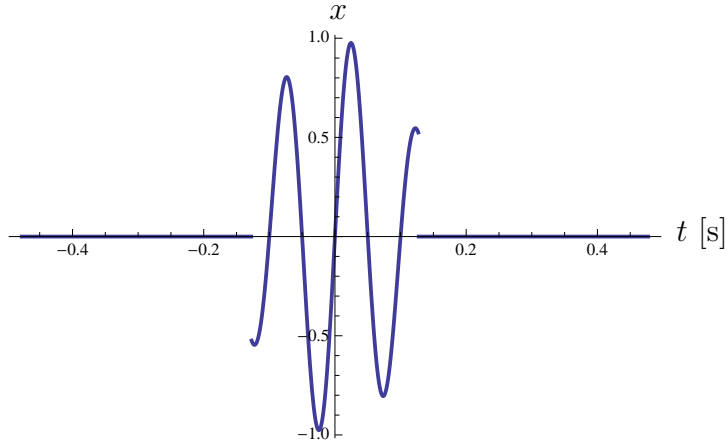


FIGURE 9 – Le signal $\sin(2\pi 10t)e^{-(2\pi t)^2}$ est restreint par multiplication par une fenêtre rectangulaire $r_{0.8/2/\pi}(t)$.

2.3 Echantillonneur parfait

Un échantillonneur parfait, à période d'échantillonnage h , produit à partir d'un signal continu $\{u(t)\}$ un signal $\{y(t)\}$ de la variable continue t mais dont l'énergie est concentrée dans des points discrets de l'axe temporel. En d'autres termes, des quantum d'énergie sont contenus à des instants discrets. Chaque quantum d'énergie est proportionnel à la valeur du signal $\{u(t)\}$ à l'instant d'échantillonnage $t = kh$. Le quantum d'énergie est donné par une impulsion de Dirac $\delta(t - kh)$.

Définition 2.1. (ECHANTILLONNEUR PARFAIT) *Un échantillonneur prend un signal d'entrée $\{u(t)\}$ et produit un signal de sortie $\{y(t)\}$ donné par*

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(kh) \delta(t - kh)$$

Remarque : il ne faut pas confondre la suite des échantillons donné par l'ensemble

$$\{u(kh) | k \in \mathbb{Z}\} \tag{5}$$

du signal $\{y(t)\}$ donné ci-dessus et qui comporte des impulsions de Dirac.

REMARQUE : Le signal $\{y(t)\}$ appartient aux signaux à énergie non nul bien que $y(t)$ soit localement confiné sur un point de l'axe temporel. L'impulsion de Dirac $\delta(t)$ a une énergie unité car

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Par contre, la suite des échantillons (5) ne possède pas d'énergie et n'en véhicule pas.

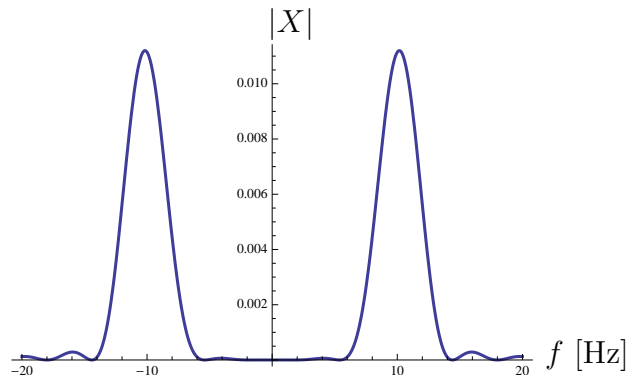


FIGURE 10 – Le module de la transformée du signal $\sin(2\pi 10t)e^{-2}$ après restriction par la fenêtre rectangulaire $r_{0.8/2/\pi}(t)$ correspond à la convolution des deux lobes gaussiens par un sinus cardinal. Le sinus cardinal entraîne de légères oscillations et un "étalement" supérieur dû à la perte de localisation fréquentielle.

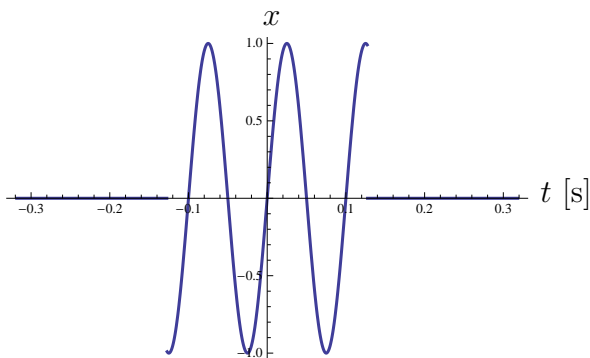


FIGURE 11 – Le signal $\sin(2\pi 10t)$ est multiplié directement par la fenêtre rectangulaire $r_{0.8/2/\pi}(t)$.

2.4 Signal à bande limitée

Définition 2.2. (SIGNAL À BANDE LIMITÉE) Une bande de fréquence $[B_1, B_2]$ ou un ensemble de fréquences f telles que

$$B_1 \leq f \leq B_2$$

est donnée. Un signal $\{x(t)\}$ est dit être à bande limitée dans $[B_1; B_2]$ si sa transformée de Fourier est nulle lorsque $f \notin [B_1; B_2]$.

2.5 Théorème d'échantillonnage

Théorème 2.2. (DE L'ÉCHANTILLONNAGE) Si un signal $\{x(t)\}$ est à bande limitée $[-B; B]$, il peut

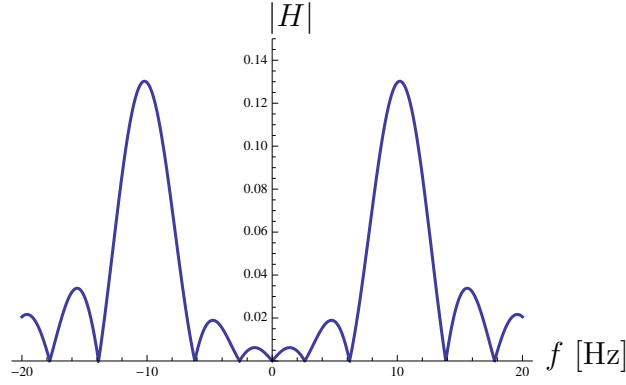


FIGURE 12 – La transformée de Fourier $r_{0.8/2/\pi}(t) \cdot \sin(2\pi 10t)$ est la convolution entre les Diracs du sinus et les sinus cardinaux de la transformée du signal rectangulaire. Les sinus cardinaux sont donc additionnés aux emplacements des Diracs, c.-à-d. en -10 et 10 . Le graphique représente le module de la transformée de Fourier. Les lobes sont plus prononcés que dans le cas du prétraitement par la gaussienne.

être reconstruit sans erreur à partir de ses échantillons $x(t_n)$ aux instants $t_n = \frac{n}{2B}$.

Démonstration :

Comme $X(f) = 0, \forall f, |f| > B$, nous pouvons développer cette fonction en série de Fourier (en fréquence) exactement comme pour un signal limité dans le temps :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{x}_n e^{-j2\pi \frac{n}{2B} f}$$

où \bar{x}_n est donné par

$$\bar{x}_n = \frac{1}{2B} \int_{-B}^{+B} X(f) e^{j2\pi \frac{n}{2B} f} df \quad (6)$$

(Série de Fourier en fréquence). Comme $X(f) = 0, \forall |f| > B$,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-B}^{+B} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

par la définition de la transformée de Fourier, et donc, comme $t_n = \frac{n}{2B}$, nous avons

$$x(t_n) = \int_{-B}^{+B} X(f) e^{j2\pi f \frac{n}{2B}} df$$

et en comparant avec (6), on a

$$\bar{x}_n = \frac{1}{2B} x(t_n)$$

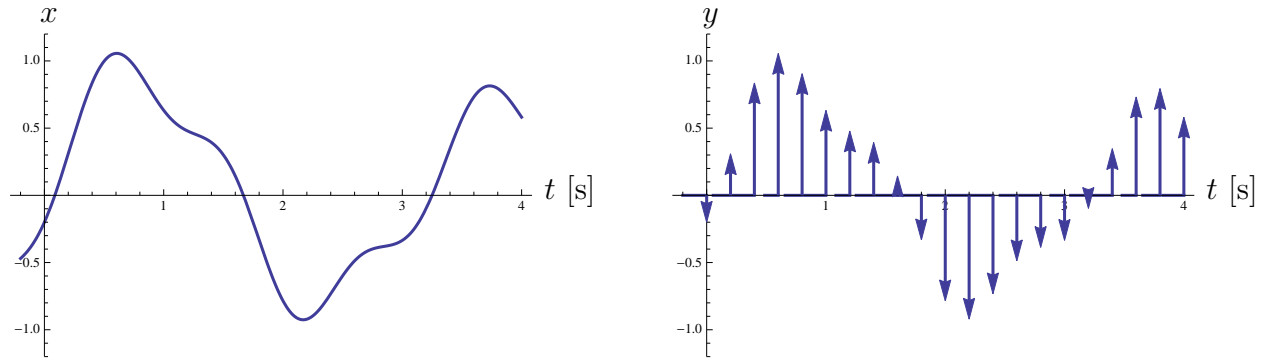


FIGURE 13 – Un échantillonneur parfait constitue un signal ayant une successions d’impulsions de Dirac dont le poids correspond à la valeur du signal échantillonné à l’instant d’échantillonnage correspondant.

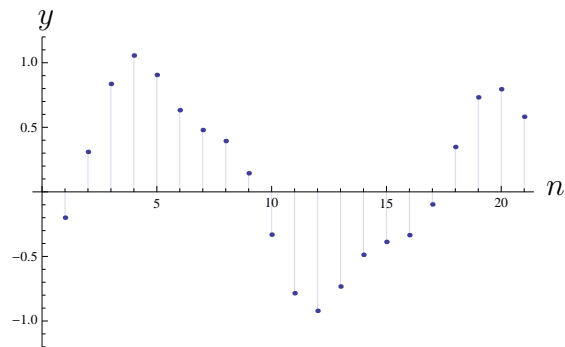


FIGURE 14 – Les échantillons ne forment qu’un ensemble discrets de valeurs et, contrairement à une série de Dirac équiseparée et pondérée par les échantillons, ne véhiculent pas d’énergie.

et le théorème d’échantillonnage est ainsi démontré. En effet, connaissant $x(t_n)$ nous avons

$$\bar{x}_n = \frac{1}{2B}x(t_n)$$

et donc $X(f)$ à partir de (6). Après une transformée de Fourier, on reconstruit sans erreur $x(t)$.

CQFD.

2.6 Formule de reconstruction

Soit la transformée inverse

$$x(t) = \int_{-B}^B X(f)e^{j2\pi ft}df$$

En utilisant (6) dans la formule précédente, on arrive à

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x(t_n) \frac{1}{2B} \int_{-B}^{+B} e^{j2\pi f(t - \frac{n}{2B})} df \right)$$

L'intégrale est la TF de $r_{2B}(f)$ (signal rectangulaire de largeur $2B$ en fréquence) dont la transformée de Fourier inverse (TFI) est $\text{sinc}(2B) = \frac{\sin(\pi 2B)}{\pi 2B}$ ce qui donne

Définition 2.3. (FORMULE DE RECONSTRUCTION)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t_n) \text{sinc}(2B(t - t_n))$$

EXPLICATIONS : La connaissance des échantillons $x(t_n)$ permet de reconstruire sans erreur le signal initial $\{x(t)\}$ à condition que ce dernier soit à bande limitée. La formule de reconstruction donne exactement la manière de le reconstruire. Un désavantage pratique cependant est la présence d'un nombre infini d'échantillons dans le passé et le futur avec une infinité de contributions à prendre en compte conformément à la formule de reconstruction.

2.7 Transformée en Z

Définition 2.4. (LA TRANSFORMÉE BILATÉRALE EN Z) Soit une suite d'échantillons $\{h(k)|k \in \mathbb{Z}\}$.

La fonction

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k}$$

est appelée la transformée bilatérale en z de la suite $\{h(k)|k \in \mathbb{Z}\}$.

Il en existe pour les signaux discrets qui sont nuls pour $k < 0$. Elle est appelée la transformée en z unilatérale. Elle est utilisée en réglage automatique.

Définition 2.5. (LA TRANSFORMÉE UNILATÉRALE EN Z) Soit une suite d'échantillons $\{h(k)|k \in \mathbb{N}\}$. La fonction

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}$$

est appelée la transformée unilatérale en z de la suite $\{h(k)|k \in \mathbb{Z}\}$.

On remarque une similitude avec la transformée de Laplace unilatérale d'un signal.

2.8 Transformée de Fourier et transformée de Laplace

La transformée de Fourier est obtenue en évaluant la transformée de Laplace bilatérale sur l'axe imaginaire.

Soit $G(s)$ la transformée de Laplace de $g(t)$ et $\hat{G}(f)$ la transformée de Laplace.

Théorème 2.3. *Si le domaine de convergence de l'intégrale de Laplace (valeur de s pour laquelle l'intégrale de la transformée de Laplace converge) contient l'axe imaginaire $s = 2\pi j f$, alors la transformée de Fourier est en relation de celle de Laplace par la relation*

$$\hat{G}(f) = G(2\pi j f)$$

La démonstration est technique à cause des notions de convergence, mais le résultat intuitivement évident (car il s'agit de la même intégrale).

2.9 Transformée de Fourier discrète

Soit le quantum de fréquence (résolution fréquentielle)

$$\nu = \Delta f = \frac{1}{Nh}$$

où h est la période d'échantillonnage.

Définition 2.6. *La transformée de Fourier discrète d'une suite d'échantillons $\{g(k)|k \in \mathbb{Z}\}$ est donnée par la série*

$$\begin{aligned} G(m) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) e^{-j2\pi \frac{m}{N} kh} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} m k} \end{aligned} \tag{7}$$

Pour une suite d'échantillons, on a la définition suivante.

Définition 2.7. *La transformée de Fourier discrète de l'ensemble fini d'échantillons $\{g(k)|k = 0, 1, \dots, N-1\}$ est définie par la collection finie d'échantillons*

$$G(m) = \sum_{k=0}^{N-1} g(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} m k} \quad m = 0, \dots, N-1$$

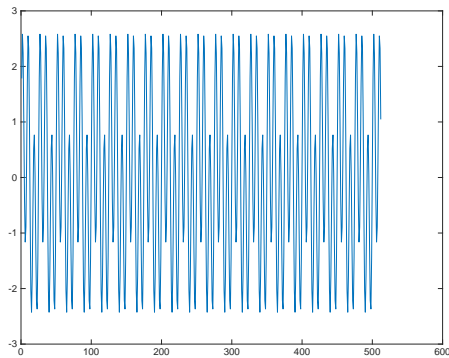


FIGURE 15 – Signal dans le domaine temporel.

Deuxième partie

Expériences

3 Expériences numériques avec des séries de Fourier

```
>> h = 0.01;
>> N = 512;
>> freq = 4;
>> signal = sin((1:N)*h*2*pi*freq) + 0.2* cos(2*(1:N)*h*2*pi*freq)+...
    2*sin(3*(1:N)*h*2*pi*freq);
>> ffsignal = fft(signal);
>> plot(abs(ffsignal))
>> figure(2)
>> plot(signal)

>> plot(abs(fft(signal.*blackman(N)'))))

>> plot(abs(fft(signal.*hann(N)'))))

>> plot(abs(fft(signal.*hamming(N)'))))
```

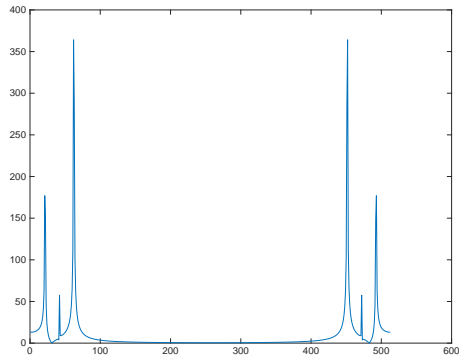


FIGURE 16 – Module de la transformée de Fourier discrète du signal

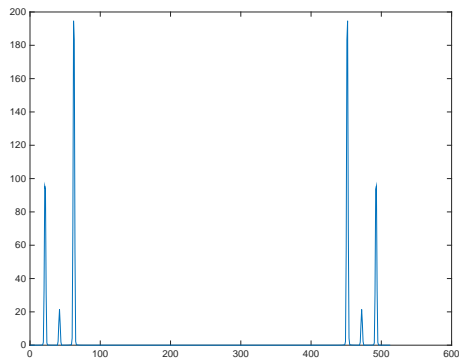


FIGURE 17 – Module de la transformée de Fourier discrète du signal après prémultiplication temporelle par la fenêtre de Blackman.

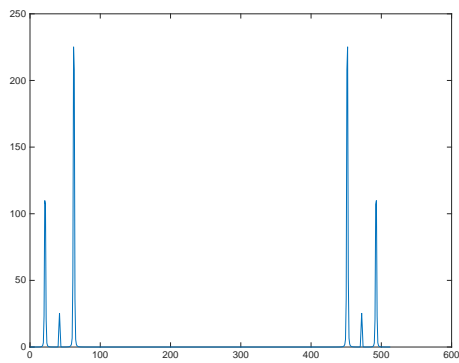


FIGURE 18 – Module de la transformée de Fourier discrète du signal après prémultiplication temporelle par la fenêtre de Hann.

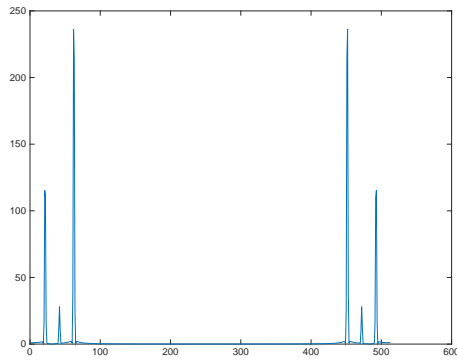


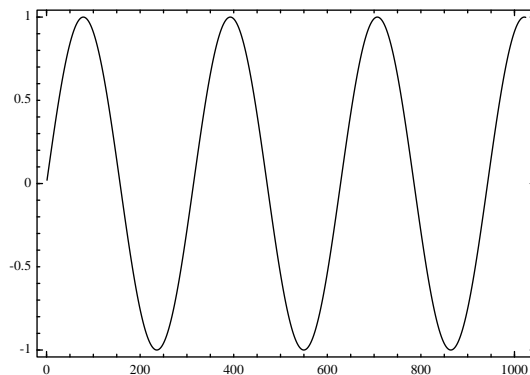
FIGURE 19 – Module de la transformée de Fourier discrète du signal après prémultiplication temporelle par la fenêtre de Hamming.

4 Expériences numériques avec un sinus échantillonné

Soit la commande MATLAB/SysQuake

```
sig = sin(0.02*(1:1024));
plot(sig)
```

qui consiste à échantillonner un sinus sur 1024 échantillons. La fréquence de ce sinus dépend de la période d'échantillonnage.



Nous supposons que la fréquence d'échantillonnage est

$$h = 0.01 \quad [\text{s}]$$

Soit \bar{t} la durée complète des échantillons.

$$\bar{t} = 1024 \cdot 0.01 = 10.24 \quad [\text{s}]$$

La fréquence du sinus contenu dans le signal échantillonné que nous venons de construire est ainsi déterminé par la relation

$$\sin(2\pi f \bar{t}) = \sin(0.02 \cdot 1024)$$

ce qui donne

$$f = \frac{0.02 \cdot 1024}{2\pi \bar{t}} = \frac{0.02 \cdot 1024}{2\pi \cdot 10.24} = 0.3183 \quad [\text{Hz}]$$

4.1 Résolution spectrale (quantum fréquentiel)

4.1.1 Fréquence maximale détectable

La fréquence d'échantillonnage est

$$f_e = \frac{1}{h} = \frac{1}{0.01} = 100 \quad [\text{Hz}]$$

et elle induit que (par le théorème de l'échantillonnage cf. théorie) la fréquence maximale détectable (si on part de 0 [Hz]) est de

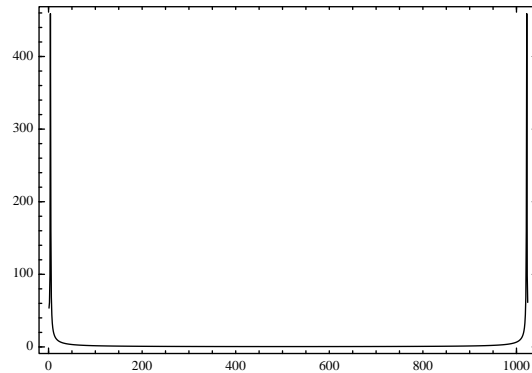
$$\frac{f_e}{2} = 50 \quad [\text{Hz}]$$

4.1.2 Module du spectre discret

En dessinant le module du spectre discret (module de la transformée de Fourier discrète du signal échantillonné généré) avec la commande

```
plot(abs(fft(sig)))
```

on constate que celui-ci comporte une partie symétrique à partir du milieu du graphique. Ceci est dû au repliement fréquentiel et la conséquence est la limitation à la moitié de toutes les fréquences disponibles (i.e. en absence du repliement on aurait 100 [Hz]) à la moitié de la fréquence théorique maximale qui est la fréquence d'échantillonnage.



Ceci conduit ainsi à la résolution spectrale ou ”quantum de fréquence” qui est

$$\nu = \frac{1}{h N} = \Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{100}{1024} = 0.09766 \quad [\text{Hz}]$$

4.2 Maximum du module des coefficients de la TFD

Déterminons le maximum du module des coefficients de la transformée de Fourier discrète (TFD). En utilisant la commande `fft` calcule la série (la somme)

$$F(n\nu) = F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k h) e^{-2\pi \frac{k n}{N} j}$$

conformément à la théorie. En d’autres termes, la correspondance entre `ffta(n-1)` et `sum(sig.*reg)` est obtenue et donc l’annulation de la différence de ces quantités suite aux instructions suivantes :

```
ffta = fft(sig);
reg = exp(-2*pi*i*(0:N-1)/N*n);
ffta(n-1) - sum(sig.*reg)
```

quel que soit n

Déterminons n qui donne le module maximum

Il faut détecter la maximum du module de la TFD. Ceci est facile avec la commande `max` :

```
[ma,id] = max(abs(fft(sig)))
```

et n sera donné par `id - 1`.

Pour $N=1024$ on trouve `id = 4` et donc $n=3$.

Fréquence estimée

La fréquence estimée \hat{f} est donnée par

$$\hat{f} = \frac{n}{N} \cdot \frac{1}{h} = \frac{3}{1024} \cdot \frac{1}{0.01} = 0.293 \quad [\text{Hz}]$$

Vérifions que cette estimée est bien dans l'intervalle déterminée par l'incertitude fréquentielle (moyennant la résolution spectrale déterminée ci-dessus) :

$$f \in [0.293 - \Delta f; 0.293 + \Delta f]$$

$$f \in [0.293 - 0.098; 0.293 + 0.098]$$

$$f \in [0.195; 0.391]$$

REMARQUE : Avec cette résolution spectrale la précision n'est pas très grande. On constate que la vraie fréquence $f = 0.318$ st bien dans l'intervalle obtenu même si l'estimée $\hat{f} = 0.293$ n'est pas d'une grande précision.

4.3 Battements et repliement spectral

Un phénomène bien connu est celui du battement. C'est le constat de l'apparition d'une modulation en basse fréquence lorsque deux signaux sinusoïdaux ont des fréquences très proches l'une de l'autre. L'expérience numérique suivante consiste à comparer le modulation réelle basse fréquence de deux sinus par rapport à deux sinus de fréquences élevée mais proches l'une de l'autre.

```
time = linspace(0,20,3000);  
signal = sin(2*pi*40*time)+0.2*sin(2*pi*42*time);
```

et

```
signal2 = sin(2*pi*40*time)+0.2*sin(2*pi*2*time);
```

On constate que les deux signaux sont difficilement reconnaissables en examinant le comportement temporel de ceux-ci (cf. figure 20).

Par contre, en dessinant les spectres de ces signaux à l'aide des commandes

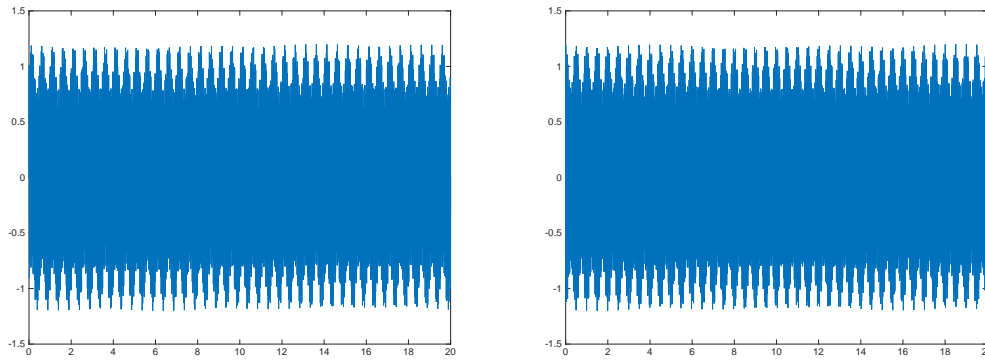


FIGURE 20 – A gauche, la modulation basse fréquence et à droite le phénomène de battement. Les deux signaux paraissent identiques dans le domaine temporel.

```
plot(abs(fft(signal.*blackman(length(signal))))')
```

et

```
plot(abs(fft(signal2.*blackman(length(signal2))))')
```

l'emplacement fréquentiel du signal sinusoïdal faible est facilement détectable (cf. figure 21). On remarque également qu'en absence de fenêtrage,

```
plot(abs(fft(signal)))'
```

il y a plus "d'étalement" des fréquences autour des fréquences caractéristiques (moins bonne résolution spectrale).

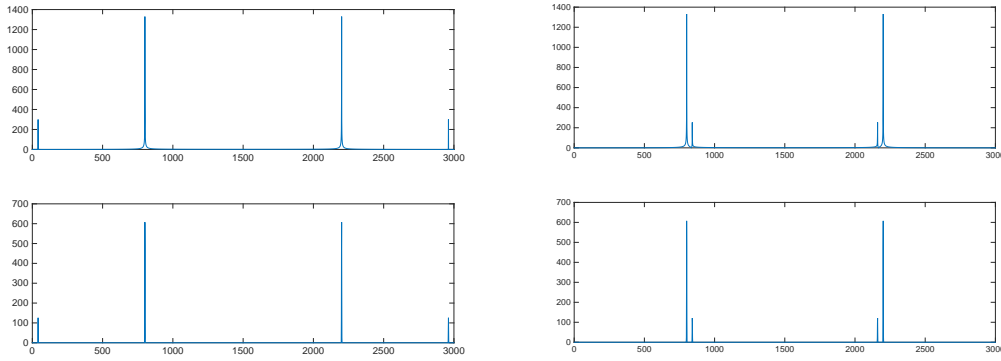


FIGURE 21 – L’analyse fréquentielle permet de rapidement faire la distinction entre un sinus modulé en basse fréquence (à gauche) et le phénomène de battement (à droite). Les figures du haut sont obtenues en absence de fenêtrage.

5 Un paradoxe ?

Le lecteur attentif constatera une sorte de contradiction avec la théorie du fenêtrage. Cette théorie indique que le pic fréquentiel associé avec la fenêtre est le moins large lorsque la fenêtre est rectangulaire. A titre illustratif, on a représenté le logarithme du module de trois fenêtres, celle rectangulaire (le pic le plus étroit, mais pics secondaire mal amorti), celle de Hamming et celle de Blackman à la figure 22.

Ainsi, on aurait du obtenir un pic plus fin en absence du fenêtrage de Blackman. En d’autres termes, les pics obtenus à la figure 16 devraient être plus fins que ceux de la figure 17. Or il n’en est rien. D’où provient ce paradoxe ?

La réponse réside dans la compréhension de ce que calcule réellement la transformée de Fourier discrète. Ce n’est pas le signal échantillonné et limité à seulement N échantillons qui est le signal sur lequel s’opère l’interprétation fréquentielle obtenue par la transformée de Fourier discrète, mais le signal périodisé qui comporte une infinité d’échantillons.

Or le signal initial que l’on a généré ne correspond pas en durée à un multiple de sa période fondamentale, de telle sorte que son périodisé (signal périodique obtenu en répliquant le signal à l’identique par concaténation de celui-ci) comporte une transition violente au point de périodisation. Cette transition ajoute des fréquences élevées dans la série de Fourier du signal continu périodisé associé au signal périodisé discret. Toutes ces fréquences sont bien au delà de la fréquence d’échantillonnage et se replient donc en basse fréquence contribuant à élargir les pics associés aux trois harmoniques fondamentales.

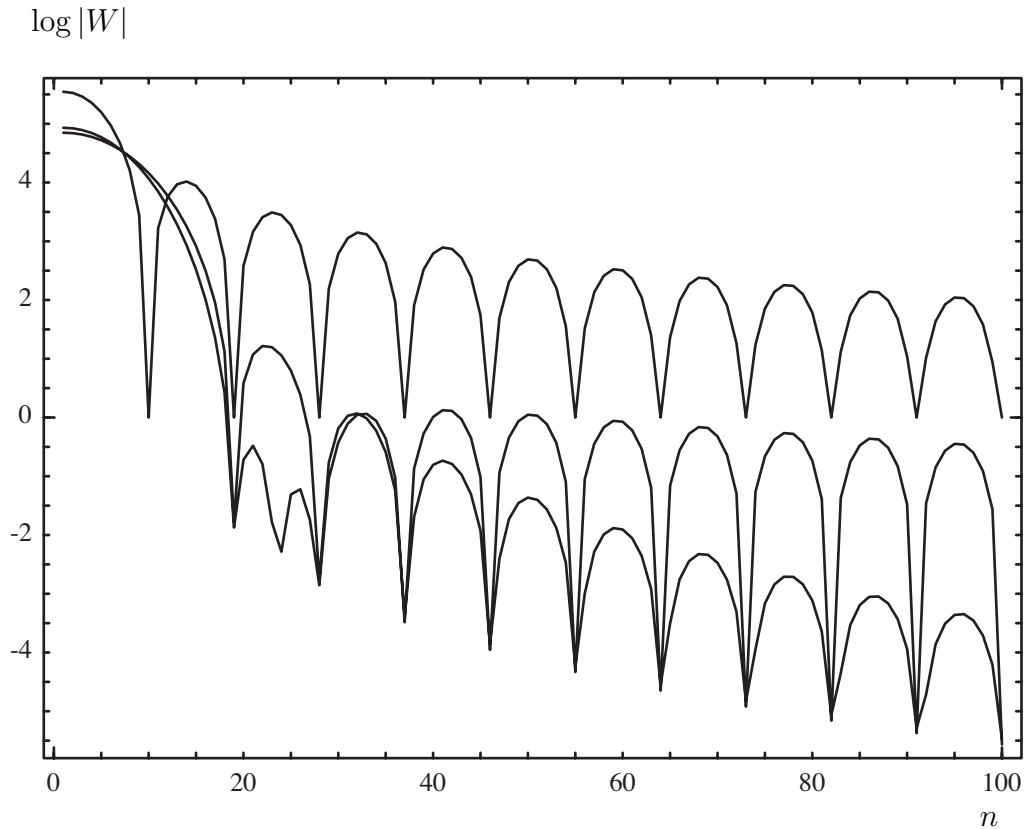


FIGURE 22 – $\log |W(n)|$, autrement dit le logarithme du module de la transformée de Fourier discrète de trois fenêtres $\{w(n)\}$. Le pic principal de la fenêtre rectangulaire est le plus étroit parmi toutes les fenêtres possibles. La fenêtre de Hamming et celle de Blackmann donnent un pic principal plus large, mais les pics secondaires sont mieux amortis.

On comprend alors le paradoxe et la raison pour laquelle le fenêtrage améliore l'estimation en rétrécissant la largeur des pics associés aux trois harmoniques. Le fenêtrage diminue l'amplitude des échantillons aux deux bords de la suite finie de ceux-ci. Le signal discret périodisé ne comporte plus de transition violente. En conséquence, les hautes fréquences issues de ces transitions aux points de périodisation contaminent peu, par repli fréquentiel, les trois harmoniques. Les pics sont moins larges qu'en absence de fenêtrage (ou fenêtrage rectangulaire implicite).

Illustrons ceci avec une expérience numérique similaire à la précédente mais en prenant soin de garantir un signal parfaitement périodique lors de la périodisation du signal initial.

T = 20;

N = 512;

```

h = T/N;
nn = (0:N-1);
sig = sin(2*pi*nn) + 0.2*sin(2*pi*nn) + 3*sin(2*pi*nn);

figure(1)
plot(abs(fft(sig)));

figure(2)
plot(abs(fft(sig.*blackman(N)')));

```

Dans le cas sans fenêtrage, on obtient la représentation fréquentielle de la figure 23

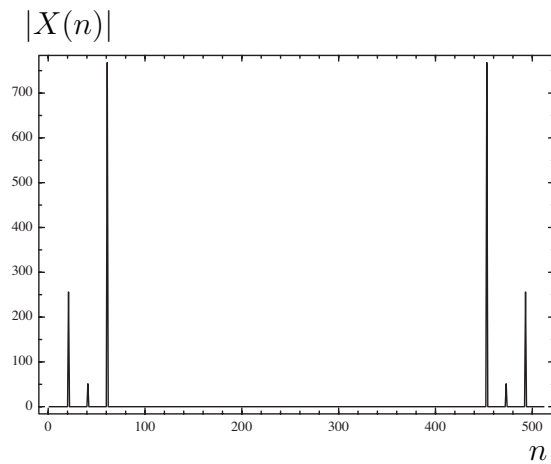


FIGURE 23 – Avec un signal dont le périodisé est continu, les pics sont les plus étroits en absence de fenêtrage (fenêtrage rectangulaire de largeur égale au nombre d'échantillons).

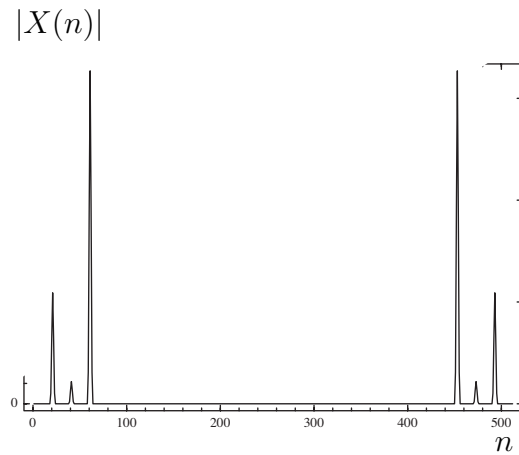


FIGURE 24 – Fenêtrage de hamming du signal associé à la figure 23.

6 Annexe : fichier experiences.m

```
% creation d un signal de trois frequences harmoniques
N = 512;
h = 0.01;
freq = 4;
signal = sin((1:N)*h*2*pi*freq) + 0.2* cos(2*(1:N)*h*2*pi*freq)+ 2*sin(3*(1:N)*h*2*pi*freq);

% calcul de la Transformee de Fourier Discrete (TFD)
ffsignal = fft(signal);
figure(1)
plot(signal)
title('signal dans le temps')
xlabel('echantillon');
ylabel('f(i)');

% representation graphique sans fenetrage
figure(2)
plot(abs(ffsignal));
title('Module de la TFD');
```

```

xlabel('echantillon');
ylabel('abs(F)');

% fenetragage de Blackman
figure(3)
blackffsignal = fft(signal.*blackman(N)');
plot(abs(blackffsignal));
title('Module de la TFD apres fenetragage de Blackman');
xlabel('echantillon');
ylabel('abs(F)');

% examen de la phase
figure(4)
plot(unwrap(angle(fft(signal.*blackman(N)'))));
title('Phase de la TFD apres fenetragage de Blackman');
xlabel('echantillon');
ylabel('arg(F)');

% un peu de filtrage
[num,den]=butter(3,0.5);
signalOut = filter(num,den,signal);
figure(5);
subplot(211);
plot(signal);
subplot(212);
plot(signalOut);

% un peu de filtrage
[num,den]=butter(3,0.5);
signalOut = filter(num,den,signal);
figure(5);

```

```

subplot(211);
plot(signal);
subplot(212);
plot(signalOut);

%% Fonction de Weierstrass, derivable nulle-part
NN = 800;
time = (1:NN)*0.5/NN;
series = zeros(1,NN);
b = 0.5;
a = 3;
for n=1:6;
series = series + b^n*cos(a^n*pi*time);
end;
figure(6);
plot(time,series);

%% train d'onde triangulaire
NN = 800;
time = (1:NN)*20/NN;
series = zeros(1,NN);
for n=1:40;
series = series + 2/n*sin(n*time);
end;
figure(7);
plot(time,series);

%% train d'onde carre
NN = 800;
time = (1:NN)*20/NN;
series = zeros(1,NN);

```



```

for n=1:40;
series = series + 2/(pi*n)*(1-(-1)^n)*sin(n*time);
end;
figure(8);
plot(time,series);

[tout,xout] = ode45('penduleSimple',[0,90],[2.8*pi/3,0.1]);
figure(9);
subplot(211);
plot(tout,xout);
fxout = fft(blackman(length(tout)).*xout(:,1));
subplot(212);
plot(abs(fxout(1:40)));

tout = 0:0.01:90;
xout = ode3('penduleSimple',tout,[2.9*pi/3;0.1]);
figure(10);
subplot(211);
plot(tout,xout);
fxout = fft(blackman(length(tout)).*xout(:,1));
subplot(212);
plot(abs(fxout(1:40)));

%%%%%%%%%
% deux sinus un dominant l'autre faible
time = linspace(0,20,3000);
signal = sin(2*pi*40*time)+0.2*sin(2*pi*42*time);
figure(11)
plot(time,signal)

% difficile de le percevoir dans le diagramma sans fenetrage

```

```
figure(12)
subplot(211)
plot(abs(fft(signal))')
subplot(212)
plot(abs(fft(signal.*blackman(length(signal))')));
```

%par contre, avec la fenetre de Blackman, cela s'ameliore quelque peu

```
signal2 = sin(2*pi*40*time)+0.2*sin(2*pi*2*time);
figure(13)
plot(time,signal2)
```

```
figure(14)
subplot(211)
plot(abs(fft(signal2))')
subplot(212)
plot(abs(fft(signal2.*blackman(length(signal2))')))
```

7 Annexe : Tables

$x(t)$	$X(f)$
1	$\delta(f)$
$\delta(t)$	1
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k\frac{1}{T})$
$e^{-j2\pi f_0 t}$	$\delta(f + f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$-j\frac{1}{2} \delta(f - f_0) + j\frac{1}{2} \delta(f + f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 f^2}{4a}}$

TABLE 1 – Transformées de Fourier $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi ft} dt$.

$x(t)$	$X(f)$
$x(t + \alpha)$	$e^{j2\pi\alpha f} X(f)$
$e^{-j2\pi\alpha t} x(t)$	$X(f + \alpha)$
$x(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$
$x(t) * y(t)$	$X(f) \cdot Y(f)$
$x(t) \cdot y(t)$	$X(f) * Y(f)$
$x^{(n)}(t)$	$(-j2\pi f)^n X(f)$

TABLE 2 – Règles des transformées de Fourier

$I_{2n} := \frac{1 \cdot 2 \cdots (2n-1)}{(4\pi)^n \sqrt{2}}$	
$H_n(t) := \sum_{p=0}^n a_p t^p$	
$\sum_{p=0}^n a_p I_{p+q} \quad q \leq n-1$	
$a_n \sum_{p=0}^n a_p I_{n+p} = 1$	
$H_n(t) := (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$	
$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t) \cdot H_m(t) \cdot e^{-2\pi t^2} dt = 1 \quad m = n$	
$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t) \cdot H_m(t) \cdot e^{-2\pi t^2} dt = 0 \quad m \neq n$	
$x(t)$	$X(f)$
$H_n(t) e^{-\pi t^2}$	$j^n H_n(f) e^{-\pi f^2}$

TABLE 3 – Polynômes d’Hermite et leurs propriétés

8 Ouvrages conseillés

Le contenu de ce document est tout à fait standard et toute bonne référence sur l’analyse de Fourier et le traitement du signal convient. Nous conseillons ”quelques classiques” ci-dessous. Le livre de référence utilisé pour la préparation de ces notes et conseillé de part sa clarté et sa concision est [1]. L’aspect numérique est traité dans [2]. Les autres ouvrages sont plus avancés et, par ordre de complexité, nous avons [3], [6], [7], [4], et [5]. L’ouvrage théorique [4] est très intéressant, en particulier pour les polynômes d’Hermite et leurs propriétés par transformée de Fourier. Le livre [3] est une excellente suggestion pour aller vers plus de théorie tout en conservant une vue didactique par diverses applications physiques (circuits et radioastronomie). Les ondelettes sont un incontournable pour tous ceux qui s’intéressent au dilemme temps fréquence dont on a effleuré la complexité dans ce TP. Des ouvrages récents excellents existent que nous n’avons pas mentionnés. Le choix est basé sur l’expérience de l’auteur pour qui les livres ci-dessous lui ont procuré des étapes de compréhension successives.

Références

- [1] B. Picinbono *Théorie des signaux et systèmes*, Dunod, 1989.
- [2] M. Kunt *Traitement numérique des signaux*, PPUR, 1989.

- [3] J. Arzac *Transformation de Fourier et théorie des distributions*, Dunod, 1961.
- [4] E. C. Titchmarsh *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford University Press, 1937.
- [5] Y. Meyer *Ondelettes et Opérateurs I*, Hermann, 1990.
- [6] A. Cohen *Ondelettes et traitement numérique du signal*, Masson, 1992.
- [7] M. Holschneider *Wavelets, An Analysis Tool*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

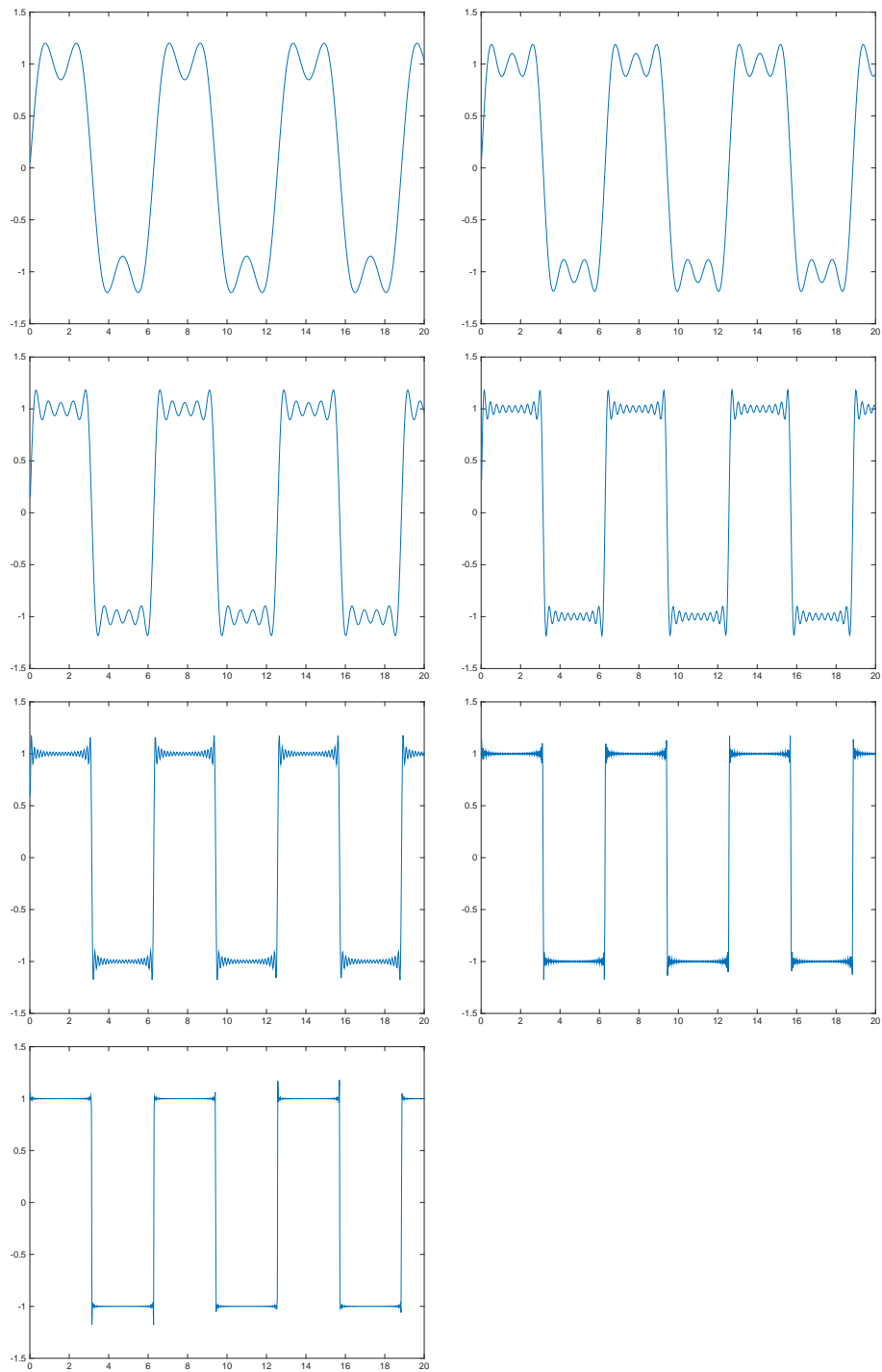


FIGURE 25 – Discontinuité et convergence de la série de Fourier associée. Le cas d'un train d'onde carré.

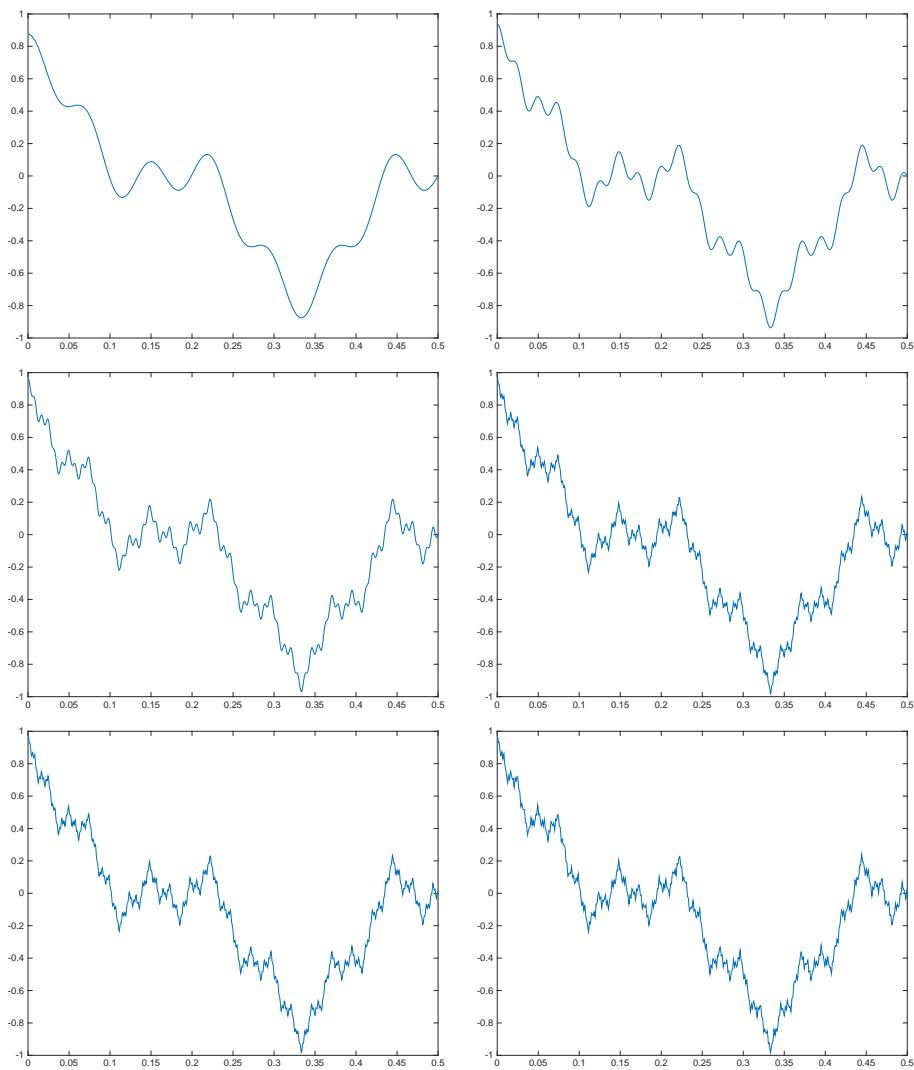


FIGURE 26 – Représentation de $\sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} \cos(3^n \pi t)$ pour $N = 3, 4, 5, 6, 7$. Bien qu'il s'agisse d'une somme de cosinus, plus le nombre N de termes est grand, plus grande paraît l'irrégularité.