Potentiel et énergie potentielle

Mécanique, cours 11.1

Jean-Philippe Ansermet

Potentiel et énergie potentielle

Potentiel et énergie potentielle

- Potentiel
- Energie mécanique
- Force dérivant d’un potentiel
- Exemples

Définition : potentiel d’une force

On considère une force qui dépend de la position et on suppose qu’on peut écrire :

$$W_{12} = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = V(\boldsymbol{r}_1) - V(\boldsymbol{r}_2)$$

(choix du signe justifié plus loin)

Position de référence (convention) : $\boldsymbol{r}_s$

$$V(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}_s} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$: ***potentiel de la force***

Cette définition n’a un sens que si le travail ne dépend pas du chemin, mais seulement du point de départ et du point d’arrivée.

On dit que la force est ***conservative***.

Définition : énergie mécanique

Si toutes les forces sont conservatives :

Energie mécanique : $E = T + V$

$V(\boldsymbol{r})$ est ***l'énergie potentielle***.

Propriété : énergie, constante du mouvement

Si toutes les forces sont conservatives :

$$E = T + V = \text{constante}$$

Démonstration : théorème de l'énergie cinétique,

$$T_2 - T_1 = W_{12} = V_1 - V_2 \quad \Longrightarrow \quad T_2 + V_2 = T_1 + V_1$$

L'énergie mécanique est une ***constante du mouvement***.

Propriété : la force dérive de son potentiel

Repère lié au référentiel : $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ $\qquad V(x_1, x_2, x_3)$

Si le potentiel existe : $\boldsymbol{F} = \sum_i -\dfrac{\partial V}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i$ $\qquad$ Notation : $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$

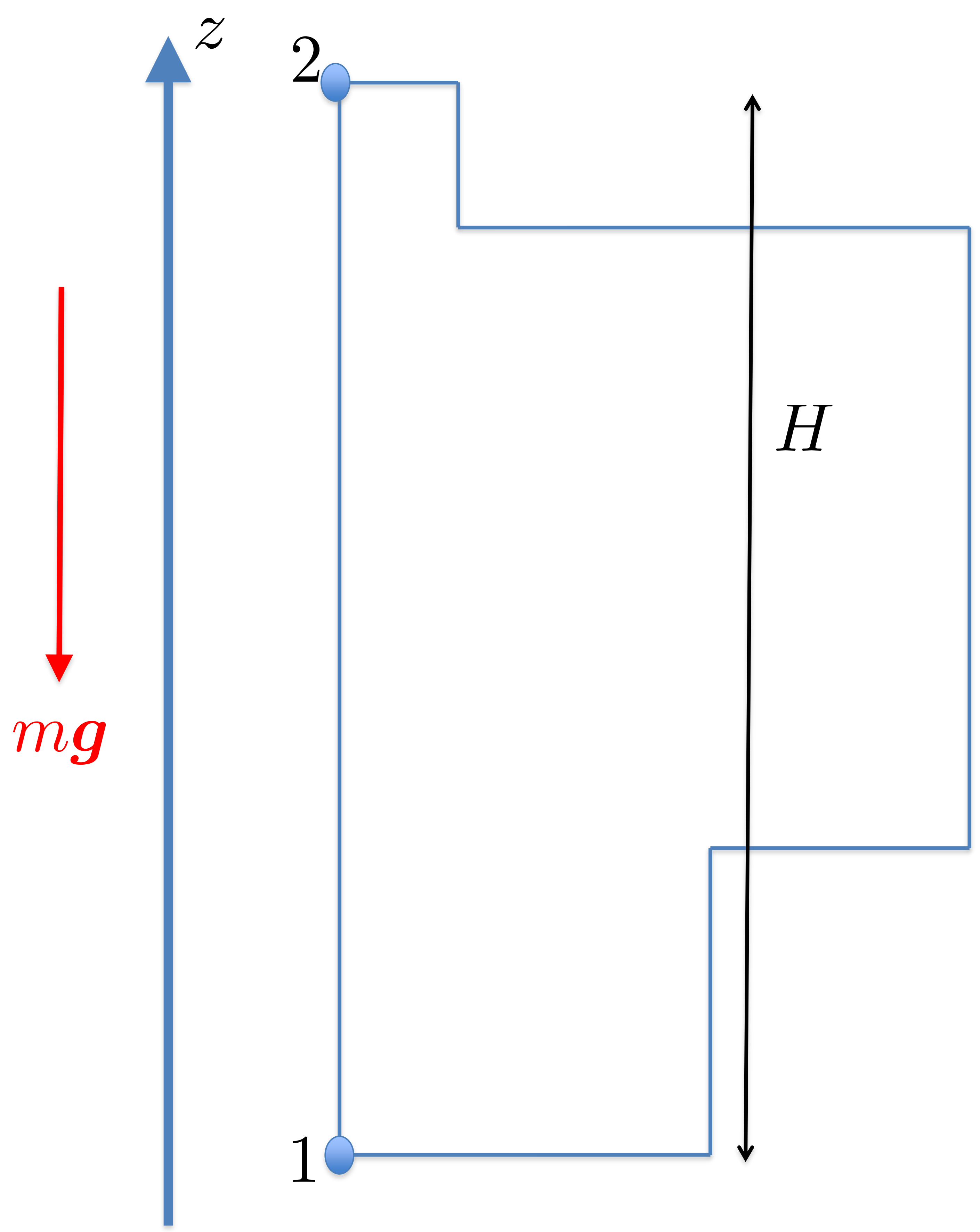
Travail dans un déplacement infinitésimal :

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = V(\boldsymbol{r}) - V(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r})$$

$$d\boldsymbol{r} = \Delta\ell \boldsymbol{e}_i$$

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \Delta\ell\, \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_i = F_i\, \Delta\ell = -\left[V(\boldsymbol{r} + \Delta\ell\, \boldsymbol{e}_i) - V(\boldsymbol{r})\right] = -\frac{\partial V}{\partial x_i}\, \Delta\ell$$

Exemple : potentiel de la pesanteur



$$\boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{r}_1$$

$$V(\boldsymbol{r}_2) = \int_{\boldsymbol{r}_2}^{\boldsymbol{r}_1} m\boldsymbol{g}d\boldsymbol{r}$$

$$= m\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = mgH$$

$$V(z) = mgz$$

$$F_z = -\frac{dV}{dz} = -mg$$

Exemple : potentiel de la force d'un ressort

Force:

$$F(x) = -kx$$

$$x_s = 0$$

$$V(x) = \int_x^{x_s} F(y)\,dy \;=\; \int_0^x ky\,dy = \frac{1}{2}\,kx^2$$

$$F_x = -\frac{dV}{dx} = -kx$$