ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Energie de l'oscillateur harmonique

Mécanique, cours 11.2

Jean-Philippe Ansermet

Energie de l'oscillateur harmonique

Energie de l'oscillateur harmonique

- Energie
- Dissipation
- Facteur de qualité

Energie, sans amortissement

Oscillateur harmonique sans amortissement :

$$x = C\cos(\omega_0 t + \Phi)$$

Energie cinétique :

$$\dot{x} = -C\omega_0 \sin(\omega_0 t + \Phi)$$

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} mC^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \Phi)$$

Energie potentielle :

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 C^2 \cos^2(\omega_0 t + \Phi)$$

Energie mécanique : $E = \frac{1}{2} mC^2\omega_0^2$

Energie, avec amortissement faible

Oscillateur harmonique faiblement amorti :

$$x = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \Phi) \qquad \gamma \ll \omega_0$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= C\, e^{-\gamma t}\left\{-\gamma \cos(\omega_1 t + \Phi) - \omega_1 \sin(\omega_1 t + \Phi)\right\} \\ &\cong C\, e^{-\gamma t}\left\{-\omega_1 \sin(\omega_1 t + \Phi)\right\}\end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{1}{2}\, m \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, k x^2 \cong \left[\frac{1}{2}\, m C^2 \omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \Phi) + \frac{1}{2}\, k C^2 \cos^2(\omega_1 t + \Phi)\right]\, e^{-2\gamma t}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E(t) = \frac{1}{2}\, k C^2\, e^{-t/\tau} \qquad \tau = \frac{1}{2\gamma}$$

Facteur de qualité

$$Q = 2\pi \frac{(\textit{énergie emmagasinée dans l'oscillateur})}{\textit{énergie dissipée dans un cycle}}$$

$$\textit{énergie emmagasinée dans l'oscillateur} = E$$

$$E(t) = \frac{1}{2} kC^2 \, e^{-t/\tau}$$

$$\textit{énergie dissipée dans un cycle} = \frac{2\pi}{\omega_1}\left|\frac{dE}{dt}\right| = \frac{2\pi}{\omega_1}\frac{1}{\tau}E$$

$$Q = \omega_1 \tau$$

Amplitude à la résonance

$$\frac{\rho(\omega = \omega_0)}{\rho(\omega = 0)} = \omega_0 \tau \cong Q$$