ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Loi de la gravitation

Mécanique, cours 13.2

Jean-Philippe Ansermet

Loi de la gravitation

Loi de la gravitation

- Lois de Kepler
- Equations du mouvement
- Energie
- Trajectoire (ellipse)
- Loi de la gravitation

Lois de Kepler

- Mesures faites par Tycho Brahé (1546 -1601)
- Interprétation par Kepler (1571 - 1630)

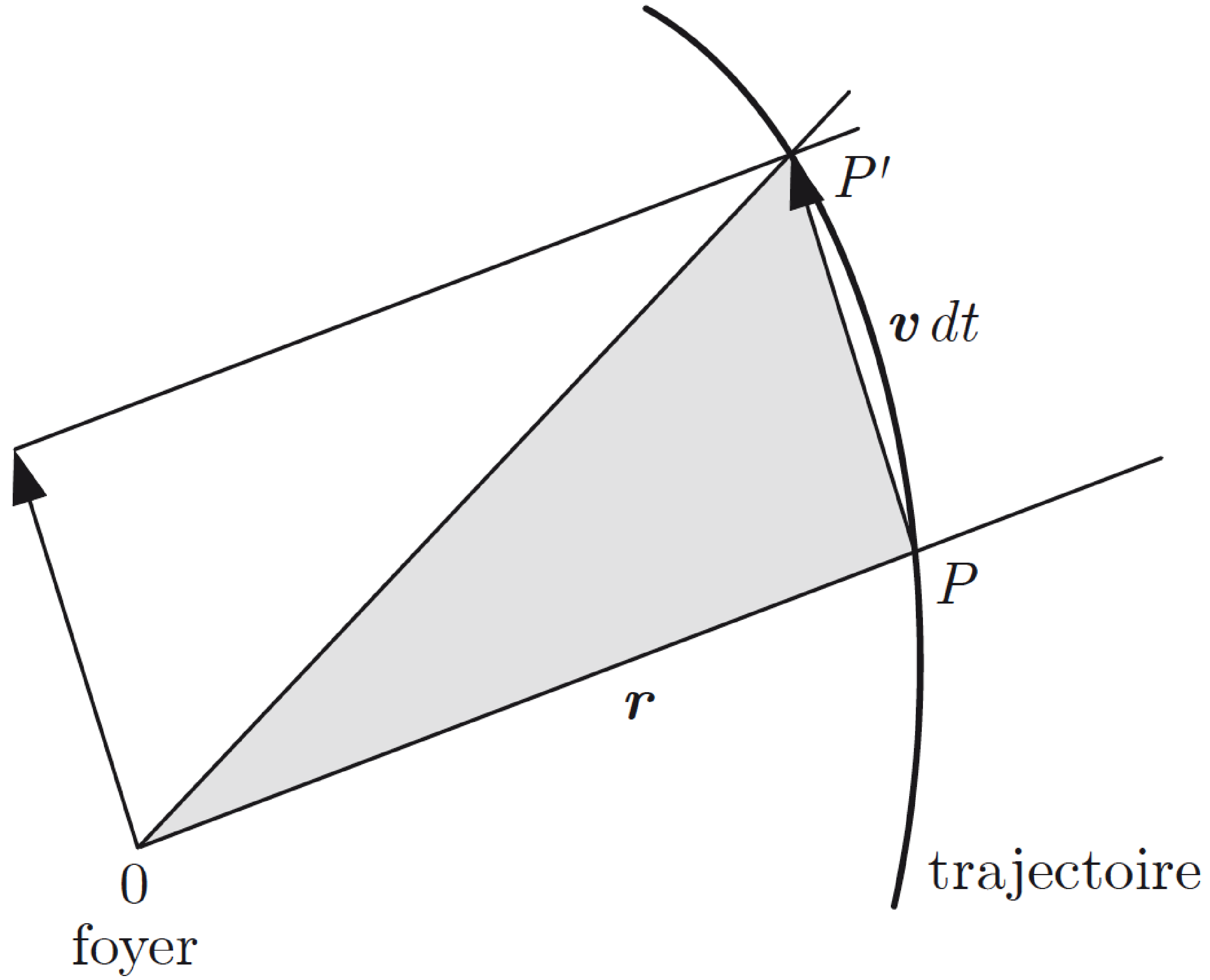
Lois de Kepler :

1.Trajectoires des planètes : ellipses, Soleil au foyer

2. Rayon vecteur balaie des aires égales en un temps fixé

3. $(\text{période})^2/(\text{grand axe})^3$ pour toutes les planètes

Loi des aires



$$dA = \mathrm{aire}\big(OPP'\big) = \frac{1}{2}\,rv\,dt\sin(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$$

Mouvement dans un plan :

$\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{v}$ toujours dans la même direction.

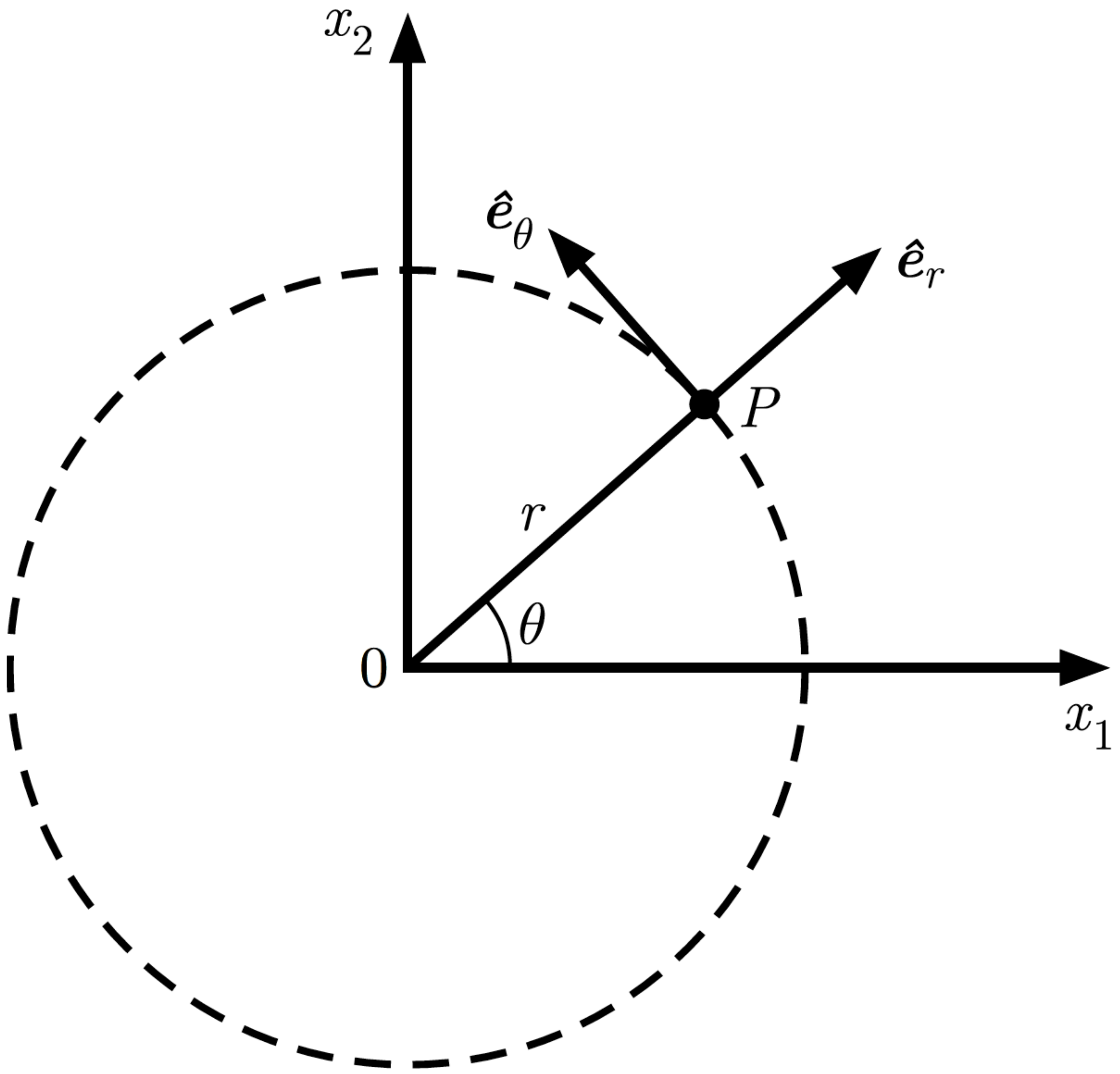
1ère et 2ème loi de Kepler :

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{v} = \frac{1}{2m}\,\boldsymbol{L}_O$$ « Vitesse aréolaire »

Moment cinétique constant :

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{v}) = 0 = \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r}\wedge\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{a} \implies$$ Force « centrale »

Référentiel, coordonnées, cinématique



Référentiel : un groupe d'étoiles

Coordonnées 'polaires' (cylindrique dans le plan)

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\boldsymbol{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\boldsymbol{e}_\theta$$

Moment cinétique

$$\boldsymbol{L}_O = mr\boldsymbol{e}_r \wedge \left(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta\right) = mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_z = L\boldsymbol{e}_z$$

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

Equation du mouvement

Modèle de force

On procède en posant déjà :

$$\boldsymbol{F} = -\frac{K}{r^2}\boldsymbol{e}_r \quad (K > 0)$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{-K}{r^2}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \longrightarrow mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0$$

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

$$m(\dot{r}\ddot{r} - r\dot{r}\dot{\theta}^2) = m(\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2\dot{r}}{m^2r^3}) = \frac{-K\dot{r}}{r^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}\right) = 0$$

Energie

Constante du mouvement :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - \frac{K}{r} \quad = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{K}{r}$$

$$\boldsymbol{F} = -\frac{K}{r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad V(r) = \int_r^{\infty} -\frac{K}{r'^2}dr' = K\left[\frac{1}{r'}\right]_r^{\infty} = \frac{-K}{r}$$

$\dfrac{-K}{r}$ est l'énergie potentielle.

E est l'énergie mécanique.

Trajectoire

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = \frac{-K}{r^2} \qquad L = mr^2\dot{\theta}$$

Changement de variable : $q = \frac{1}{r}$ $\quad \dot{r} = \frac{-1}{q^2}\frac{dq}{d\theta}\dot{\theta} = -r^2\dot{\theta}\frac{dq}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{dq}{d\theta}$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m}\frac{d^2q}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{L}{m}\frac{d^2q}{d\theta^2}\frac{L}{mr^2} = -\frac{L^2}{m^2}q^2\frac{d^2q}{d\theta^2}$$

$$\frac{d^2q}{d\theta^2} + q = \frac{Km}{L^2} \qquad q = \frac{1}{r} = \frac{Km}{L^2} + C\cos(\theta + \theta_0)$$

<u>Equation polaire d'une ellipse</u>

Valeurs extrémales : $\frac{1}{r_1} = \frac{Km}{L^2} + C \qquad \frac{1}{r_2} = \frac{Km}{L^2} - C \quad \left(C < Km/L^2\right)$

3ème loi de Kepler

(vitesse aréolaire) × (période) = aire de l'ellipse

$$\frac{L}{2m}T = \text{aire}$$

$$\text{aire} = \int_0^T \frac{L}{2m}dt = \int_0^T \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(KM/L^2 + C\cos\theta\right)^2} = \frac{1}{C^2}\frac{\pi\left(Km/CL^2\right)}{\left(\left(KM/CL^2\right)^2 - 1\right)^{3/2}}$$

Grand axe :

$$2a = \frac{1}{\frac{Km}{L^2} - C} + \frac{1}{\frac{Km}{L^2} + C}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{K}$$

Loi ‘universelle’

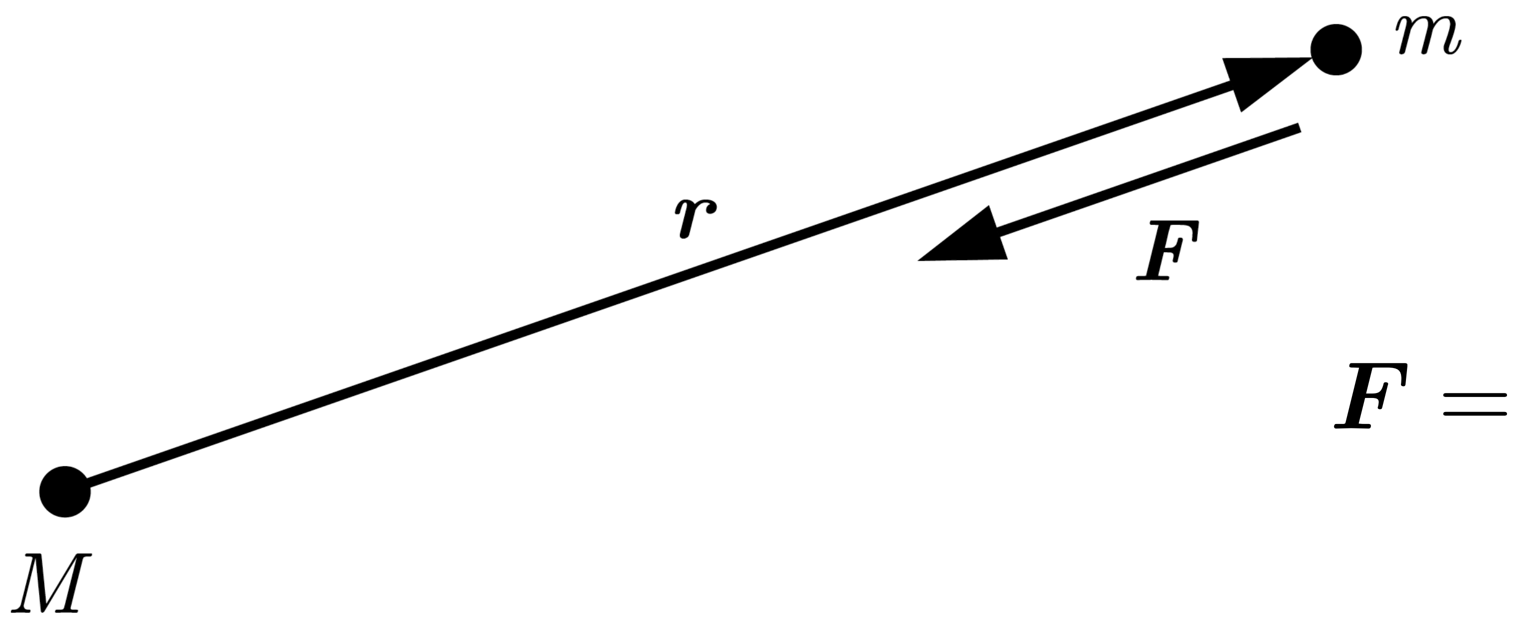
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{K}$$

Newton :
si c’est vrai pour toute planète :

$$K \propto m$$

Newton :
le soleil joue un rôle semblable à celui de la planète

$$K \propto M\,m$$



$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$G = 6.7\ 10^{-11}\,m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

Constante gravitationnelle