Exemples de référentiels accélérés

Mécanique, cours 15.2

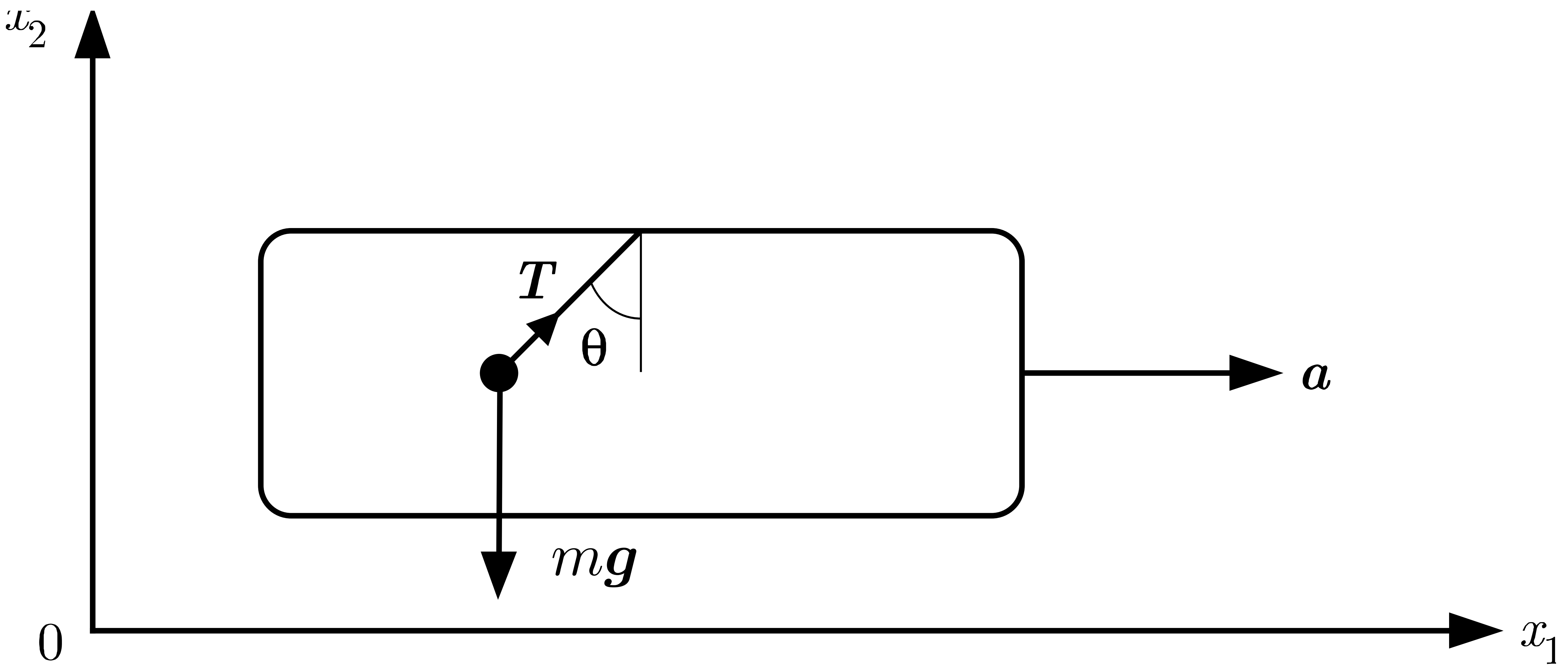
Jean-Philippe Ansermet

Exemples de référentiels accélérés

Exemples de référentiels accélérés

- Pendule dans le train
- Modèle de centrifugeuse

Pendule dans le train, référentiel - sol



$$\theta = \text{constante}$$

$$\boldsymbol{a} = \text{constante}$$

Bilan des forces : $\boldsymbol{T}$ $\quad m\boldsymbol{g}$

Cinématique : accélération $\boldsymbol{a}$

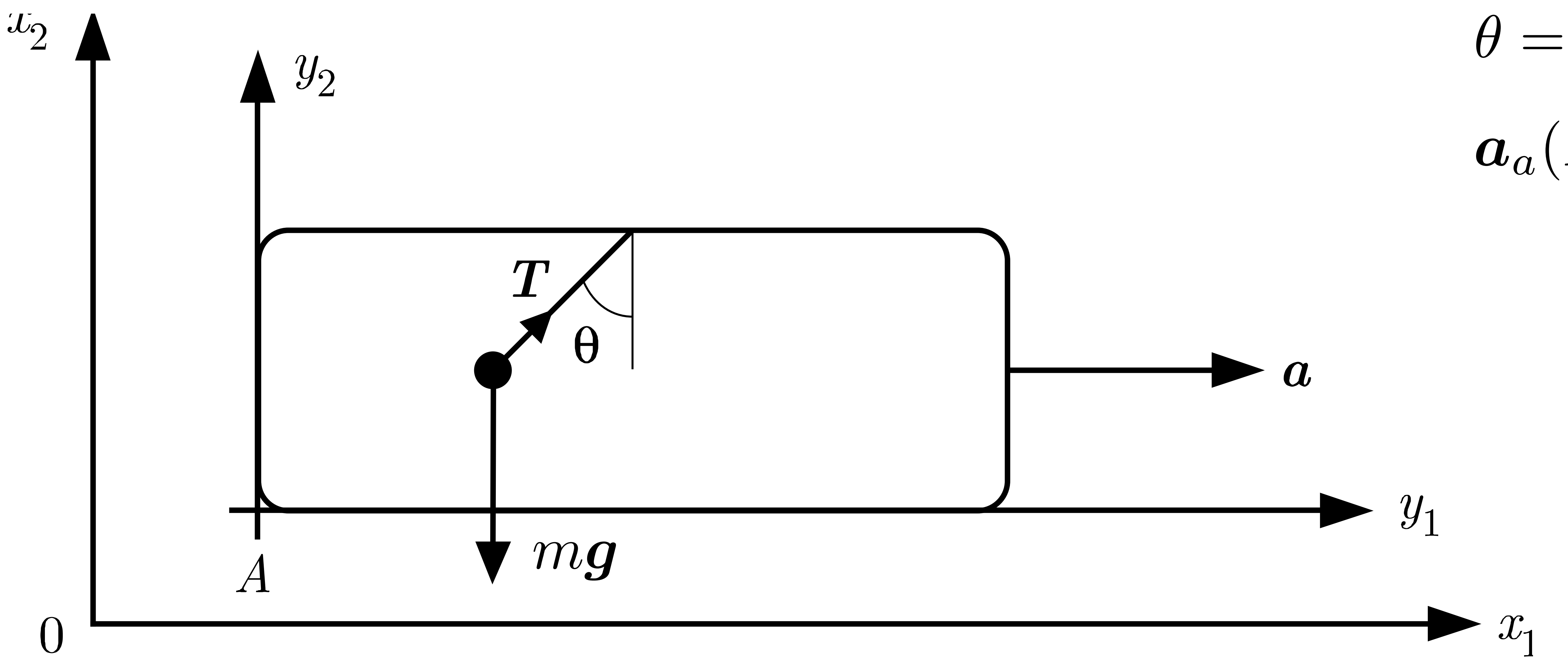
$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g}$$

$$ma = T\sin\theta$$

$$0 = -mg + T\cos\theta$$

$$\boxed{\tan\,\theta = a/g}$$

Pendule dans le train, référentiel - train



$$\theta = \text{constante}$$

$$\boldsymbol{a}_a(A) = \boldsymbol{a} = \text{constante}$$

Bilan des forces : $\boldsymbol{T}$ $m\boldsymbol{g}$

Dynamique dans référentiel accéléré :

$$m\boldsymbol{a}_r(P) = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g} - m\boldsymbol{a}_a(A)$$

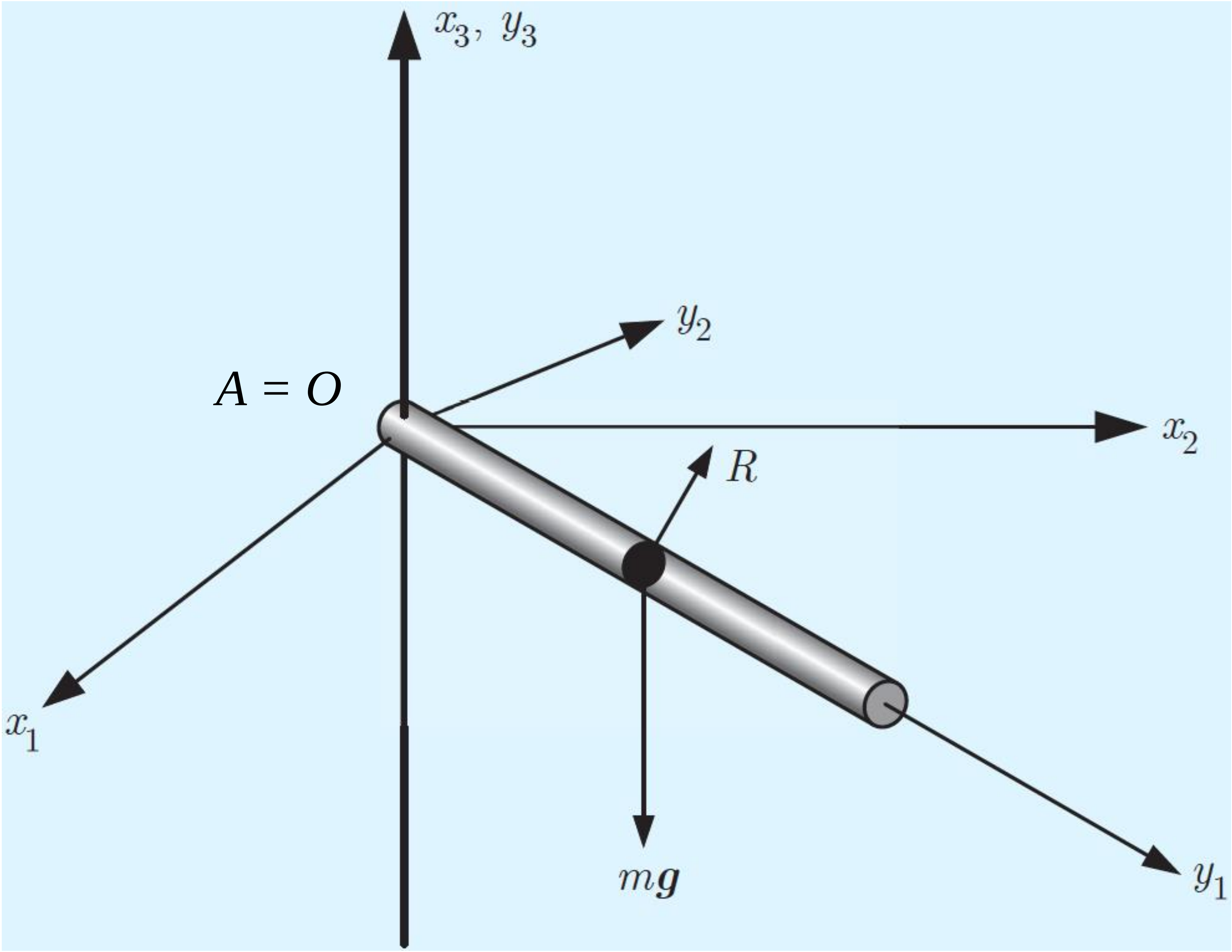
$$\dot{\theta} = 0 \implies \boldsymbol{a}_r(P) = 0$$

$$0 = T\sin\theta - ma$$

$$0 = -mg + T\cos\theta$$

$$\boxed{\tan\,\theta = a/g}$$

Modèle de centrifugeuse



Vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\boldsymbol{x}}_3$

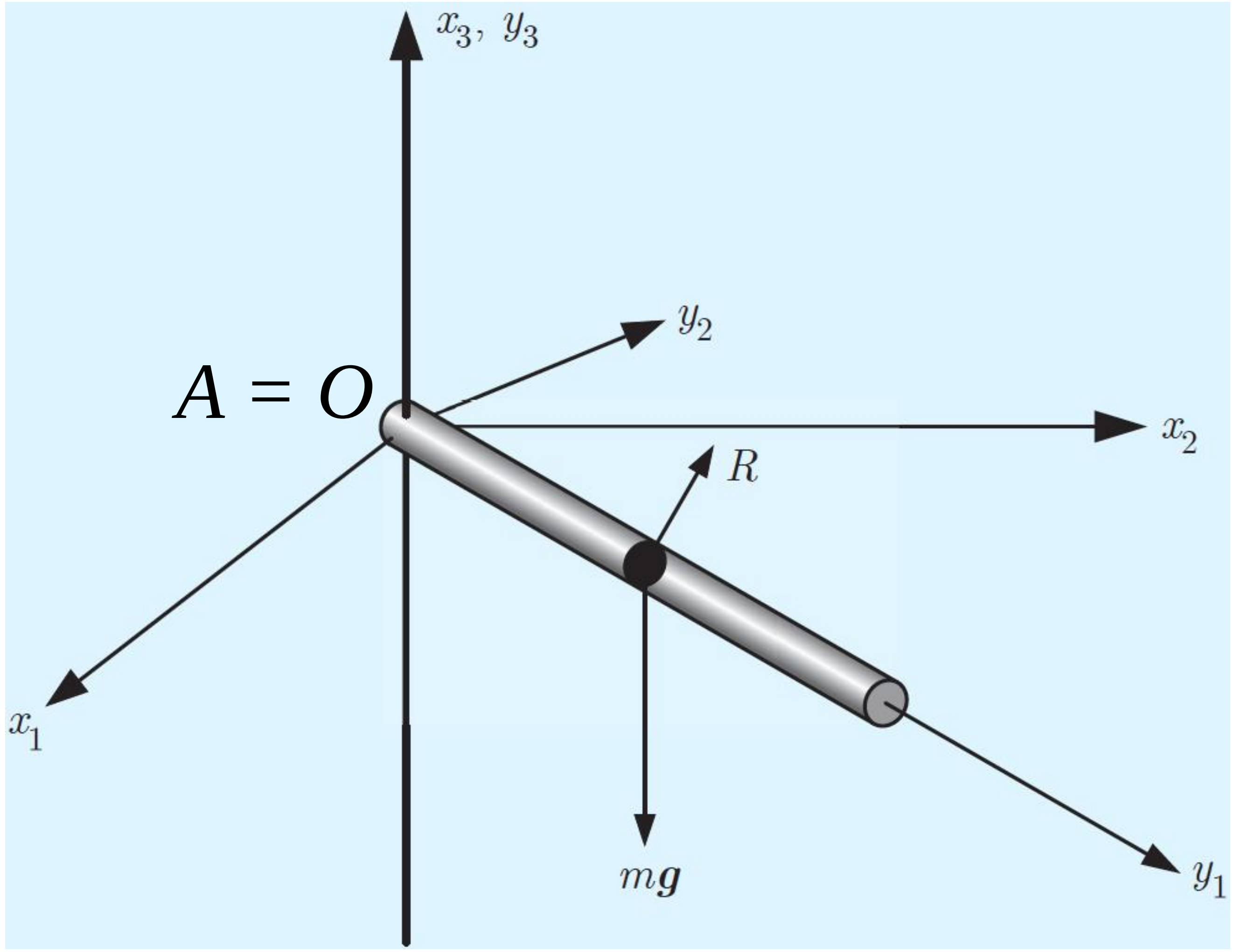
$\Omega = \text{constante}$

Contrainte :

$$y_2 = y_3 = 0$$
$$\dot{y}_2 = \dot{y}_3 = 0$$

Modèle de centrifugeuse

Formalisme : $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_a(A) + m\boldsymbol{a}_r(P) + m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{AP} + m\boldsymbol{\Omega} \wedge \left(\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP}\right) + 2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_r(\boldsymbol{P})$



Force de contrainte :

$$\boldsymbol{R} = R_2\hat{\boldsymbol{y}}_2 + R_3\hat{\boldsymbol{y}}_3$$

Pesanteur :

$$m\boldsymbol{g}$$

Cinématique :

$$\boldsymbol{v}_r = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{a}_r = \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

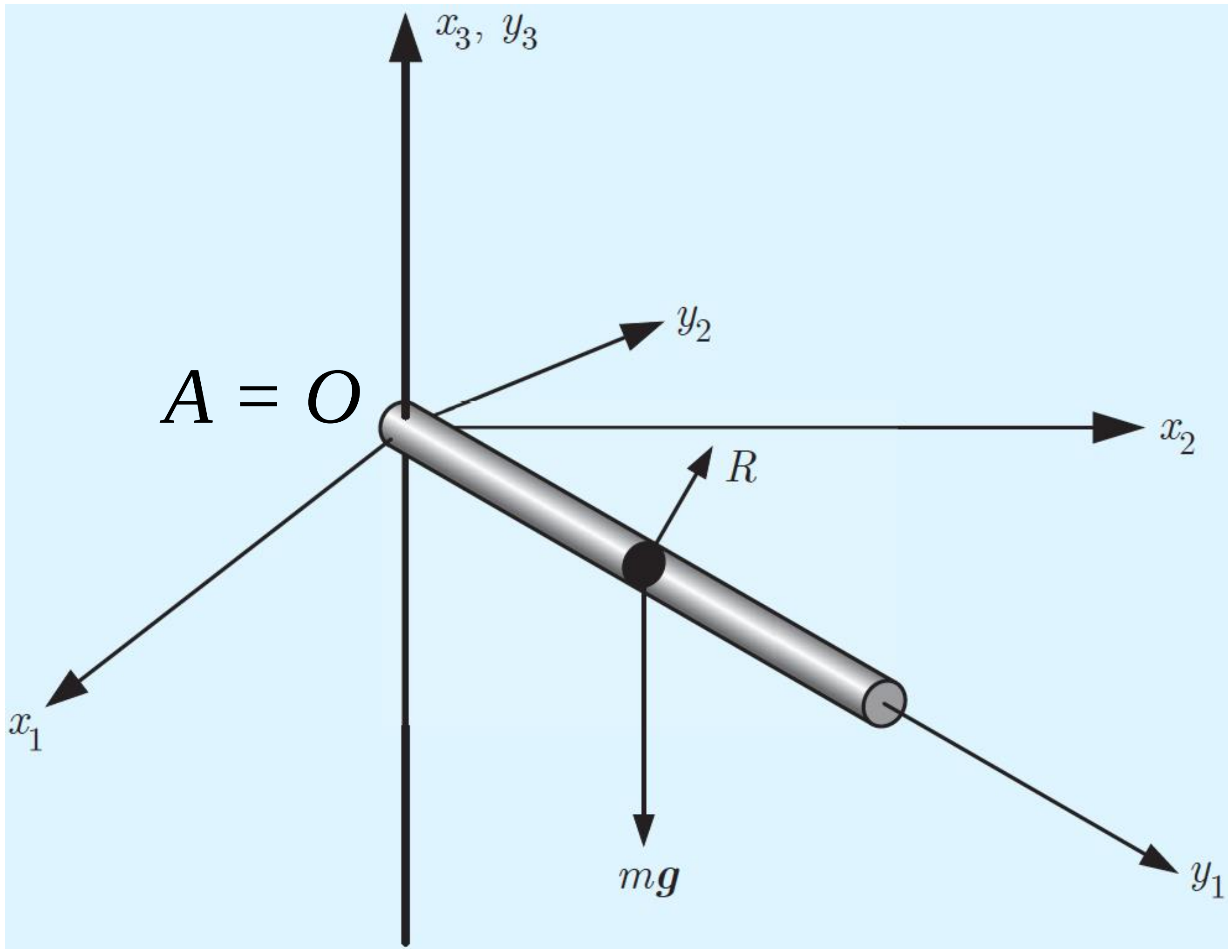
$$\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP}) = -\Omega^2 y_1 \hat{\boldsymbol{y}}_1$$

$$2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_r(P) = 2\Omega\ \dot{y}_1\hat{\boldsymbol{y}}_2$$

$$\begin{aligned} m\left(\ddot{y}_1 - \Omega^2 y_1\right) &= 0 \\ m2\Omega\dot{y}_1 &= R_2 \\ 0 &= R_3 - mg \end{aligned}$$

Point de vue du référentiel en rotation

$$m\left(\ddot{y}_1 - \Omega^2 y_1\right) = 0$$
$$m2\Omega\dot{y}_1 = R_2$$
$$0 = R_3 - mg$$



Force centrigue :
Dans le référentiel en rotation,

$$m\ddot{y}_1 = m\Omega^2 y_1$$

force radiale dirigée vers l'extérieur.

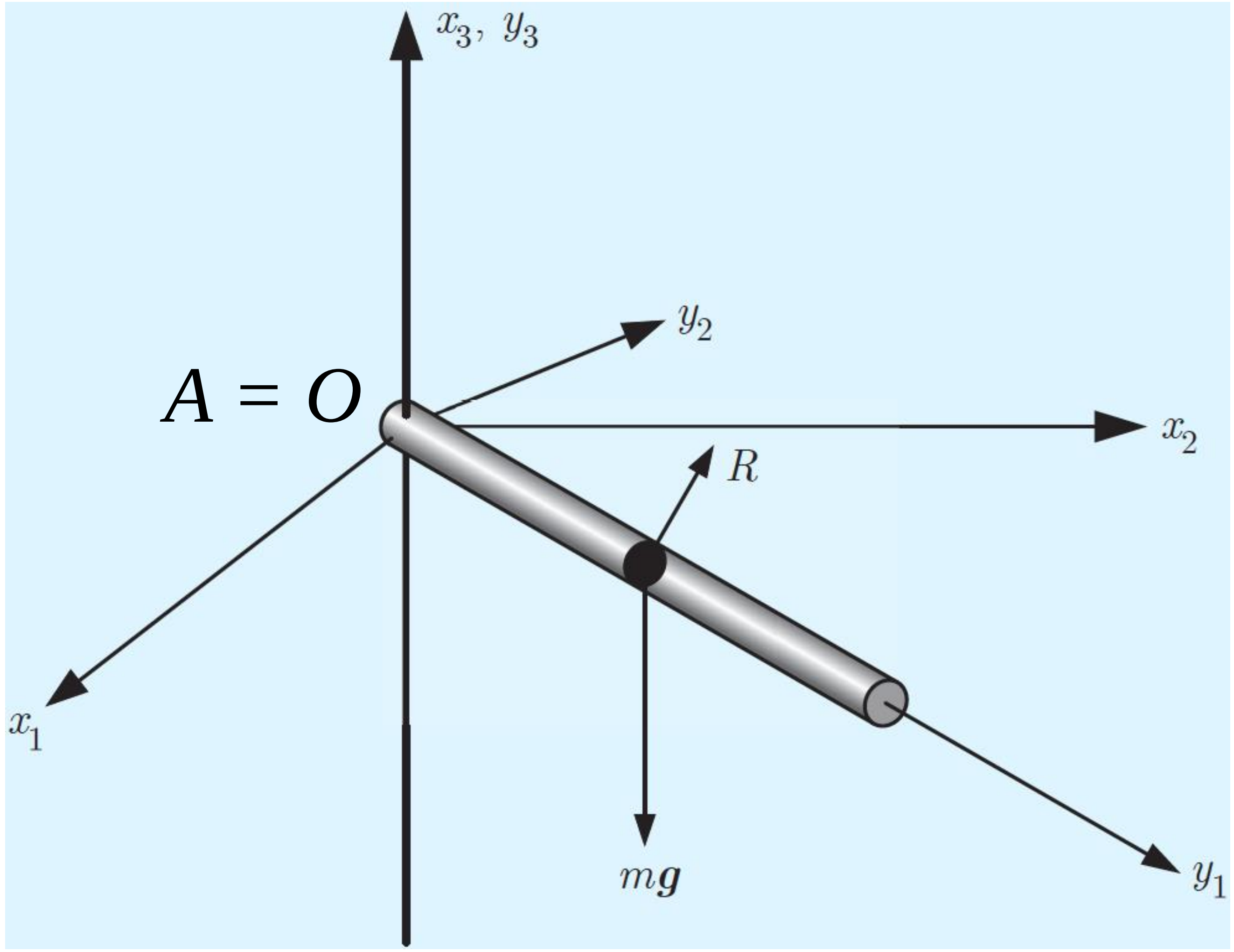
Force de Coriolis :
Dans le référentiel en rotation,

$$m\ddot{y}_2 = 0 = R_2 - 2m\Omega\dot{y}_1$$

force vers la droite quand on regarde dans le sens de la marche.

Si on oublie R_2 : équation du mouvement absurde.

Constante du mouvement



$$m\left(\ddot{y}_1 - \Omega^2 y_1\right) = 0$$

$$\dot{y}_1\ddot{y}_1 - \Omega^2 y_1\dot{y}_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{y}_1^2 - \frac{1}{2}\Omega^2 y_1^2\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\dot{y}_1^2 - \frac{1}{2}\Omega^2 y_1^2 = \text{constante}$$

$\boldsymbol{R}$ travaille !

$$T = \frac{1}{2}\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}\Omega^2 y_1^2 \neq \text{constante}$$