ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Systèmes de points matériels

Mécanique, cours 17.1

Jean-Philippe Ansermet

Systèmes de points matériels

Systèmes de points matériels

- Centre de masse
- 3ème loi généralisée
- Lois de la dynamique
- Principes de conservation

Définition : centre de masse

Système de points matériels :

- masse m_α
- aux points P_α

Centre de masse, G, défini par :

$$\boldsymbol{OG} = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{OP}_\alpha \qquad M = \sum_\alpha m_\alpha$$

Définition indépendante du choix de O:

$$\boldsymbol{O'G'} = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{O'P}_\alpha = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{O'O} + \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{OP}_\alpha$$

$$= \boldsymbol{O'O} + \boldsymbol{OG} = \boldsymbol{O'G}$$

Définition : référentiel centre de masse

Soit un référentiel et un système de points matériels.

Le référentiel qui contient le centre de masse et qui est en translation par rapport au référentiel donné, est appelé référentiel centre de masse.

Translation : pour tout repère lié au référentiel centre de masse

$$(G, \hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3) \quad \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = 0$$

Vitesse dans le référentiel donné : $\boldsymbol{v}_\alpha$

Vitesse dans le référentiel centre de masse : $\boldsymbol{v}'_\alpha$

Propriétés du référentiel centre de masse

$$\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{GP}_\alpha = 0$$

Démonstration :

$$\boldsymbol{OG} = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{OP}_\alpha = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha (\boldsymbol{OG} + \boldsymbol{GP}_\alpha)$$

$$= \boldsymbol{OG} + \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{GP}_\alpha$$

$$\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{v}'_\alpha = 0$$

Démonstration :

$$\boldsymbol{OP}_\alpha = \boldsymbol{OG} + \boldsymbol{GP}_\alpha \implies \boldsymbol{v}_\alpha = \boldsymbol{V}_G + (\boldsymbol{v}_\alpha - \boldsymbol{V}_G) = \boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{v}'_\alpha$$

$$\boldsymbol{V}_G = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \left(\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{v}'_\alpha\right)$$

$$= \boldsymbol{V}_G + \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{v}'_\alpha$$

$3^{\text{ème}}$ loi de Newton généralisée

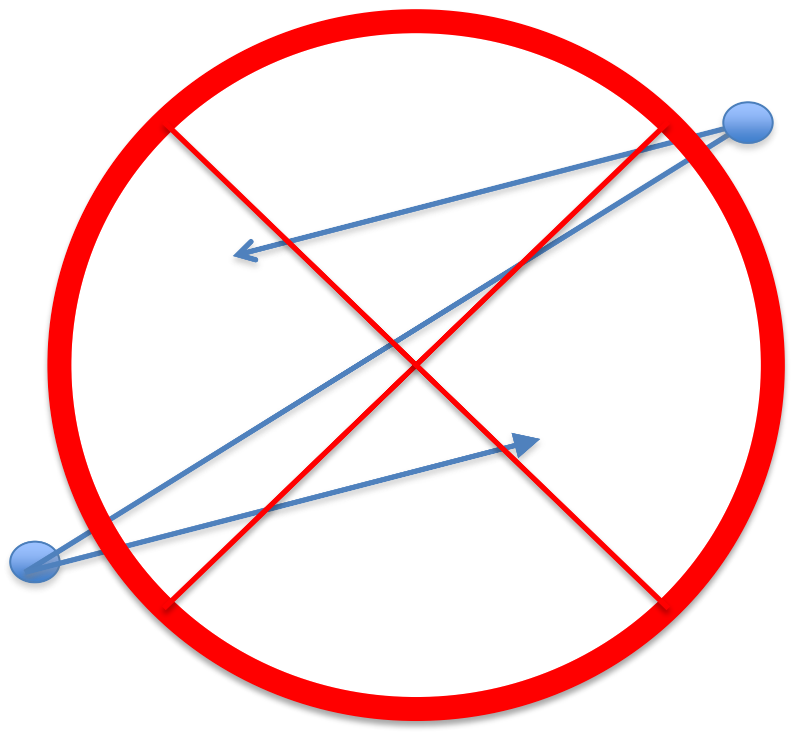
On distingue :

- forces intérieures,
- forces extérieures.

Soient deux points matériels : $\boldsymbol{F}^{2\to1} + \boldsymbol{F}^{1\to2} = 0$

On impose en plus : $\boldsymbol{OP}_1 \wedge \boldsymbol{F}^{2\to1} + \boldsymbol{OP}_2 \wedge \boldsymbol{F}^{1\to2} = 0$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{OP}_1 \wedge \boldsymbol{F}^{2\to1} + \boldsymbol{OP}_2 \wedge \boldsymbol{F}^{1\to2} &= \\ \boldsymbol{OP}_2 \wedge \boldsymbol{F}^{1\to2} - \boldsymbol{OP}_1 \wedge \boldsymbol{F}^{1\to2} & \\ = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 \wedge \boldsymbol{F}^{1\to2} &\end{aligned}$$



$3^{\text{ème}}$ loi (suite)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Système de points matériels :

$$\boldsymbol{P} = \sum_\alpha \boldsymbol{p}_\alpha, \qquad \boldsymbol{p}_\alpha = m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha \qquad \boldsymbol{L}_0 = \sum_\alpha \boldsymbol{L}_{0,\alpha} \qquad \boldsymbol{L}_{0,\alpha} = \boldsymbol{OP}_\alpha \wedge \boldsymbol{p}_\alpha$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}_\alpha}{d\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{F}_\alpha \qquad \frac{d\boldsymbol{L}_{0,\alpha}}{d\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{M}_{0,\alpha} \qquad \boldsymbol{M}_{0,\alpha} = \boldsymbol{OP}_\alpha \wedge \boldsymbol{F}_\alpha$$

$$\sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{int} = \sum_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \boldsymbol{F}^{\beta\to\alpha} = \sum_{1 \le \alpha \le \beta < N} \sum_\beta \left(\boldsymbol{F}^{\alpha\to\beta} + \boldsymbol{F}^{\beta\to\alpha}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
\sum_\alpha \left(\boldsymbol{OP}_\alpha \wedge \boldsymbol{F}_\alpha^{int}\right) &= \sum_{1 \le \alpha \le \beta < N} \left(\boldsymbol{OP}_\alpha \wedge \boldsymbol{F}^{\beta\to\alpha} + \boldsymbol{OP}_\beta \wedge \boldsymbol{F}^{\alpha\to\beta}\right) \\
&= \sum_{1 \le \alpha \le \beta < N} \left((\boldsymbol{OP}_\beta - \boldsymbol{OP}_\alpha) \wedge \boldsymbol{F}^{\alpha\to\beta}\right) \\
&= \sum_{1 \le \alpha \le \beta < N} \left(\boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{P}_\beta \wedge \boldsymbol{F}^{\alpha\to\beta}\right) = 0
\end{aligned}$$

Dynamique d'un système de points matériels

Pour tout système de points matériels :

$$\boldsymbol{F}^{ext} = \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{ext} \qquad \boldsymbol{M}_0^{ext} = \sum_\alpha \boldsymbol{OP}_\alpha \wedge \boldsymbol{F}_\alpha^{ext}$$

Théorème de la quantité de mouvement : $\dfrac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{F}^{ext}$

$$M\boldsymbol{OG} = \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{OP}_\alpha \implies M\boldsymbol{V}_G = \boldsymbol{P}$$

$$M\frac{d\boldsymbol{V}_G}{dt} = \boldsymbol{F}^{ext}$$

Théorème du moment cinétique : $\dfrac{d\boldsymbol{L}_0}{dt} = \boldsymbol{M}_0^{ext}$

Principes de conservation

$$M\frac{d\boldsymbol{V}_G}{dt} = \boldsymbol{F}^{ext} \qquad \frac{d\boldsymbol{L}_0}{dt} = \boldsymbol{M}_0^{ext}$$

Si $\boldsymbol{F}^{ext} = 0$ $\qquad \boldsymbol{P} = \text{constante}$

Si $\boldsymbol{M}_O^{ext} = 0$ $\qquad \boldsymbol{L}_O = \text{constante}$

Si $\hat{\boldsymbol{u}}$ appartient au référentiel et :

$$\boldsymbol{F}^{ext} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = 0 \qquad \boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = \text{constante}$$

$$\boldsymbol{M}_O^{ext} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = 0 \qquad \boldsymbol{L}_O \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = \text{constante}$$