Torseurs et représentation duale de la transformation des formes linéaires sur l'algèbre de Lie du groupe euclidien

François Reuse

20 février 2015

Table des matières

1.1 Introduction

Le déplacement infinitésimal d'un corps solide rigide est la composition d'une translation et d'une rotation infinitésimales qui peut être assimilée à une transformation infinitésimale du groupe euclidien $\mathbb{E}^3$ c'est-à-dire du groupe des transformations de l'espace à trois dimensions qui laissent les distances (ainsi que l'orientation) invariantes. Cette dernière transformation infinitésimale fournit ainsi le changement des coordonnées des points attachés au corps solide lors d'un tel déplacement.

Une transformation infinitésimale du groupe euclidien est donnée par un élément infinitésimal de l'algèbre de Lie de ce groupe Or le travail infinitésimal des *"forces"* qui agissent sur le corps solide durant le déplacement infinitésimal de celui-ci est une grandeur qui est laissée invariante lors d'un changement de coordonnées, donc invariante sous l'action du groupe euclidien puisque les changements de systèmes de coordonnées sont précisément décrits par des transformations du groupe $\mathbb{E}^3$. Par ailleurs ce travail infinitésimal des *"forces"* dépend linéairement du déplacement du corps solide. Autrement dit ce travail est donné par une forme linéaire sur l'algèbre de Lie du groupe euclidien. Or les éléments de l'algèbre de Lie se transforment selon une représentation du groupe euclidien appelée la représentation adjointe du groupe euclidien. Par voie de conséquence l'invariance du travail associé aux *"forces"* entraîne que ces *"forces"* se transforment selon la représentation duale de la représentation adjointe (transformation des formes linéaires sur l'algèbre de Lie) du groupe euclidien autrement dit selon la représentation duale de l'action du groupe euclidien sur l'algèbre de Lie qui lui est associée.

La démarche que nous avons adoptée dans la présentation du sujet est la suivante. On commence par une brève présentation du groupe des rotations $SO(3)$ dans l'espace à trois dimension. On enchaine par la présentation du groupe euclidien $\mathbb{E}^3$ des déplacements dans l'espace à trois dimensions. Suit la mise en évidence l'algèbre de Lie de ce dernier groupe ainsi que l'action de ce dernier groupe sur l'algèbre de Lie. Le dual de cette action fournit la loi de transformation de ces *"forces"* aussi appelées torseurs. Les propriétés des torseurs découlent par conséquent de la structure du groupe $\mathbb{E}^3$.

1.2 Le groupe des déplacements euclidiens

1.2.1 Le groupe des rotations $SO(3)$

$\breve{\boldsymbol{\omega}}$: vecteur axial de rotation.

$$R(\breve{\boldsymbol{\omega}})\ R(\breve{\boldsymbol{\omega}}')\ R(\breve{\boldsymbol{\omega}})^{-1} = R(R(\breve{\boldsymbol{\omega}})\breve{\boldsymbol{\omega}}') \tag{1.1}$$

$$R(\breve{\boldsymbol{\omega}})^T = R(\breve{\boldsymbol{\omega}})^{-1} = R(-\breve{\boldsymbol{\omega}}) \tag{1.2}$$

$$R(\delta\breve{\boldsymbol{\omega}}) = \mathbb{I} + G_\ell\ \delta\breve{\omega}^\ell \tag{1.3}$$

$$G_\ell^T = -G_\ell \quad , \quad \ell = 1,2,3 \tag{1.4}$$

$$G_\ell\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_\ell \wedge \boldsymbol{x} \tag{1.5}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad G_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$R(\breve{\boldsymbol{\omega}})\ G_\ell\ R(\breve{\boldsymbol{\omega}})^{-1} = R(\breve{\boldsymbol{\omega}})^k{}_\ell\ G_k \tag{1.6}$$

$$[\ G_j,\ G_k\ ] = c_j{}^\ell{}_k\ G_\ell \quad , \quad c_j{}^\ell{}_k = \boldsymbol{e}_\ell \cdot (\boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_k) \tag{1.7}$$

$$R(\delta\breve{\boldsymbol{\omega}})\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \delta\breve{\boldsymbol{\omega}} \wedge \boldsymbol{x} \tag{1.8}$$

1.2.2 Le groupe euclidien $\mathbb{E}^3$

$$(\boldsymbol{a},\ R)\ \in\ \mathbb{R}^3 \times SO(3) \quad , \quad \boldsymbol{x}\ \mapsto\ \boldsymbol{x'} = \boldsymbol{a} + R\ \boldsymbol{x} \tag{1.9}$$

Loi de groupe

$$(\boldsymbol{a}_1,\ R_1)(\boldsymbol{a}_2,\ R_2) = (\boldsymbol{a}_1 + R_1\ \boldsymbol{a}_2,\ R_1 R_2) \tag{1.10}$$

Elément neutre $(\mathbf{0},\ \mathbb{I})$ et élément inverse

$$(\boldsymbol{a},\ R)^{-1} = (R^{-1},\ -R^{-1}\boldsymbol{a}) \tag{1.11}$$

$$(\boldsymbol{a},\ R) = (\boldsymbol{a},\ \mathbb{I})(\mathbf{0},\ R) \quad , \quad (\text{rotation } R \text{ suivie d'une translation } \boldsymbol{a}) \tag{1.12}$$

1.2.3 Représentation adjointe du groupe euclidien $\mathbb{E}^3$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a},\ R)(\delta\boldsymbol{a},\ R(\delta\breve{\boldsymbol{\omega}}))(\boldsymbol{a},\ R)^{-1} &= \big(\ \boldsymbol{a}+R\ \delta\boldsymbol{a}-R\ R(\delta\breve{\boldsymbol{\omega}})R^{-1}\boldsymbol{a},\ R\ R(\delta\breve{\boldsymbol{\omega}})\ R^{-1}\ \big)\\ &= \big(\ \boldsymbol{a}+R\ \delta\boldsymbol{a}-R(R\ \delta\breve{\boldsymbol{\omega}})\ \boldsymbol{a},\ R(R\ \delta\breve{\boldsymbol{\omega}})\ \big)\\ &= \big(R\ \delta\boldsymbol{a}-(R\ \delta\breve{\boldsymbol{\omega}})\wedge\boldsymbol{a},\ \mathbb{I}+(R\ \delta\breve{\boldsymbol{\omega}})\cdot\breve{\boldsymbol{G}}\ \big)\end{aligned}$$

$$(\delta\boldsymbol{a},R(\delta\breve{\boldsymbol{\omega}}))\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{a}+\delta\breve{\boldsymbol{\omega}}\wedge\boldsymbol{x} \tag{1.13}$$

En écriture matricielle 4×4

$$(\boldsymbol{a},\ R)\quad\mapsto\quad\begin{bmatrix}R & \boldsymbol{a}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad,\quad(\boldsymbol{a},\ R)^{-1}\quad\mapsto\quad\begin{bmatrix}R^{-1} & -R^{-1}\boldsymbol{a}\\ 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{1.14}$$

$$(\boldsymbol{a}_1,\ R_1)(\boldsymbol{a}_2,\ R_2)\quad\mapsto\quad\begin{bmatrix}R_1 & \boldsymbol{a}_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_2 & \boldsymbol{a}_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_1R_2 & \boldsymbol{a}_1+R_1\boldsymbol{a}_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{1.15}$$

$$P_k=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{e}_k\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad,\ k=1,2,3\qquad L_\ell=\begin{bmatrix}G_\ell & \boldsymbol{0}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad,\ \ell=1,2,3. \tag{1.16}$$

$$(\delta\boldsymbol{a},\ \delta R)\quad\mapsto\quad\mathbb{I}+\delta a^k\ P_k+\delta\breve{\omega}^\ell\ G_\ell \tag{1.17}$$

Représentation adjointe.

Problème :

$$(\boldsymbol{a},\ R)(\delta\boldsymbol{a},\ \delta R)(\boldsymbol{a},\ R)^{-1} = (\delta\boldsymbol{a}',\ \delta R') \quad \text{(à déterminer !)} \tag{1.18}$$

Solution :

$$\begin{bmatrix} R & \boldsymbol{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_k \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = R^j{}_k\ P_j \tag{1.19}$$

$$\begin{bmatrix} R & \boldsymbol{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L_\ell \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = R^j{}_\ell\ \big(L_j - (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{P})_j\big) \tag{1.20}$$

$$d(\boldsymbol{a},\ R) \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ -R\ (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{G}) & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

où

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{G})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{x} \quad , \quad \forall\ \boldsymbol{x} \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial d(\boldsymbol{a},\ \mathbb{I})}{\partial a^k}\Big|_{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}} = g_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -(\boldsymbol{e}_k \wedge) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -G_k & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial d(\boldsymbol{0},\ \mathbb{I})}{\partial \breve{\omega}^\ell}\Big|_{R=\mathbb{I}} = g_{3+\ell} = \begin{bmatrix} G_\ell & 0 \\ 0 & G_\ell \end{bmatrix}$$

1.2.4 Algèbre de Lie du groupe euclidien $\mathbb{E}^3$

$$\left[\delta a^k \ P_k + \delta\omega^\ell \ L_\ell \ , \ P_j \ \right] = (\boldsymbol{P} \wedge \delta\boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{e}_j \tag{1.23}$$

et

$$\left[\delta a^k \ P_k + \delta\omega^\ell \ L_\ell \ , \ L_j \ \right] = \big(\boldsymbol{L} \wedge \delta\boldsymbol{\omega}) - \delta\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{P}\big) \cdot \boldsymbol{e}_j \tag{1.24}$$

Par conséquent

$$\left[\boldsymbol{P} \ , \ P_j \ \right] = 0 \quad , \quad \left[\boldsymbol{L} \ , \ P_j \ \right] = \boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{P} \tag{1.25}$$

$$\left[\boldsymbol{P} \ , \ L_j \ \right] = \boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{P} \quad , \quad \left[\boldsymbol{L} \ , \ L_j \ \right] = \boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{L} \tag{1.26}$$

Forme de Killing

$$(P_1, \ P_2, \ P_3, \ L_1, \ L_2, \ L_3) \equiv (P_\alpha \ , \ \alpha = 1, \ ..., \ 6) \tag{1.27}$$

Relations de commutations

$$[\ P_\alpha, \ P_\beta \ ] = c_\alpha{}^\gamma{}_\beta \ P_\gamma \tag{1.28}$$

$$g_{\alpha\beta} = Tr(P_\alpha P_\beta) = -2 \times \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha = \beta = 4, 5, 6 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

La forme quadratique construite sur $g_{\alpha\beta}$ est *invariante* sous l'action de la représentation adjointe.

1.3 Loi de transformation des “forces”. Les torseurs

Déplacement : $(\delta\boldsymbol{a},\ \delta\breve{\boldsymbol{\omega}})$.

Forces : $(\boldsymbol{F},\ \breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}})$.

$$\delta E = \boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{a} + \breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}}\cdot\delta\breve{\boldsymbol{\omega}} \quad : \quad \textbf{EST UN INVARIANT} \tag{1.29}$$

1.3.1 Conjugaisons du groupe des déplacements euclidiens

$$\delta E = \boldsymbol{F}'\cdot\delta\boldsymbol{a}' + \breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}}'\cdot\delta\breve{\boldsymbol{\omega}}' \tag{1.30}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \xrightarrow{(\delta\boldsymbol{a},\ \delta\breve{\boldsymbol{\omega}})} & \mathcal{R} \\ (\boldsymbol{a},\ R)\downarrow & & \downarrow(\boldsymbol{a},\ R) \\ \mathcal{R}' & \xrightarrow{(\delta\boldsymbol{a}',\ \delta\breve{\boldsymbol{\omega}}')} & \mathcal{R}' \end{array} \tag{1.31}$$

Ce diagramme est commutatif

$$\delta\boldsymbol{a}' = R\ \delta\boldsymbol{a} - (R\ \delta\breve{\boldsymbol{\omega}})\wedge\boldsymbol{a} \quad , \quad \delta\breve{\boldsymbol{\omega}}' = R\ \delta\breve{\boldsymbol{\omega}} \tag{1.32}$$

$$
\begin{aligned}
\delta E &= \boldsymbol{F}' \cdot \big(R\,\delta\boldsymbol{a} - (R\,\delta\breve{\boldsymbol{\omega}}) \wedge \boldsymbol{a}\big) + \breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}}' \cdot \big(R\,\delta\breve{\boldsymbol{\omega}}\big) \\
&= (R^{-1}\boldsymbol{F}') \cdot \delta\boldsymbol{a} + \big(R^{-1}(\breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}}' - \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{F}')\big) \cdot \delta\breve{\boldsymbol{\omega}}
\end{aligned}
$$

Par conséquent, pour les éléments du dual des déplacements infinitésimaux, c'est-à-dire les “forces”

$$
\boldsymbol{F} = R^{-1}\boldsymbol{F}' \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F}' = R\,\boldsymbol{F} \tag{1.33}
$$

$$
\breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}} = R^{-1}\big(\breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}}' - \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{F}'\big) \quad \Rightarrow \quad \breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}}' = R\,\big(\breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}} + (R^{-1}\boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{F}\big) \tag{1.34}
$$

$$
\mathcal{D}(\boldsymbol{a},\ R)\ (\boldsymbol{F},\ \breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}})\ \mathcal{D}(\boldsymbol{a},\ R)^{-1} = (\boldsymbol{F}',\ \breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}}') \tag{1.35}
$$

Par conséquent

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}' \\ \breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{G} & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}} \end{bmatrix}. \tag{1.36}
$$

$$
\mathcal{D}(\boldsymbol{a},\ R) = \begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{G} & R \end{bmatrix} \tag{1.37}
$$

avec, comme en (1.22), $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{G})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{x}$.

1.3.2 Les invariants

Il y a deux invariants qui sont

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}} \tag{1.38}$$

Forme quadratique sesquilinéaire positive (dégénérée) où $A > 0$ constante physique arbitraire $[A] =$ mètre

$$< (\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{\mathcal{M}}_1), (\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{\mathcal{M}}_2) >= A\ \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}_2 + \boldsymbol{F}_2 \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}_1 \tag{1.39}$$

1.3.3 Espace vectoriel des "torseurs"= espace dual des déplacements euclidiens

L'espace des $(\boldsymbol{F},\ \breve{\boldsymbol{\mathcal{M}}})$ **est un espace vectoriel réel de dimension** 6 **muni d'une forme quadratique positive invariante dégénérée.**

Produit vectoriel Définition

$$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{\mathcal{M}}_1) \wedge (\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{\mathcal{M}}_2) = \big(\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2,\ \boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{\mathcal{M}}_2 - \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{\mathcal{M}}_1\big) \tag{1.40}$$

Vérification du caractère "torseur"

$$\begin{aligned}
&\big(\boldsymbol{F}'_1, \boldsymbol{\mathcal{M}}'_1\big) \wedge \big(\boldsymbol{F}'_2, \boldsymbol{\mathcal{M}}'_2\big) = \big(\boldsymbol{F}'_1 \wedge \boldsymbol{F}'_2,\ \boldsymbol{F}'_1 \wedge \boldsymbol{\mathcal{M}}'_2 - \boldsymbol{F}'_2 \wedge \boldsymbol{\mathcal{M}}'_1\big) \\
= &\Big(R\,\big(\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2\big),\ R\,\big(\boldsymbol{F}_1 \wedge (\boldsymbol{\mathcal{M}}_2 + (R^{-1}\boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{F}_2)\big) - R\,\big(\boldsymbol{F}_2 \wedge (\boldsymbol{\mathcal{M}}_1 + (R^{-1}\boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{F}_1)\big)\ \Big) \\
= &\Big(R\,\big(\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2\big),\ R\,\big(\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{\mathcal{M}}_2 - \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{\mathcal{M}}_1 + \boldsymbol{F}_1 \wedge ((R^{-1}\boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{F}_2) - \boldsymbol{F}_2 \wedge ((R^{-1}\boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{F}_1)\ \big)\ \Big)
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}_1 \wedge ((R^{-1}\boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{F}_2) - \boldsymbol{F}_2 \wedge ((R^{-1}\boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{F}_1) \\
= &-(\boldsymbol{F}_1 \cdot (R^{-1}\boldsymbol{a}))\ \boldsymbol{F}_2 + (\boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{F}_2)\ (R^{-1}\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{F}_2 \cdot (R^{-1}\boldsymbol{a}))\ \boldsymbol{F}_1 - (\boldsymbol{F}_2 \cdot \boldsymbol{F}_1)\ (R^{-1}\boldsymbol{a}) \\
= &(R^{-1}\boldsymbol{a}) \wedge (\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2)
\end{aligned}$$

Finalement on constate que

$$\begin{aligned}
&\big(\boldsymbol{F}'_1 \wedge \boldsymbol{F}'_2,\ \boldsymbol{F}'_1 \wedge \boldsymbol{\mathcal{M}}'_2 - \boldsymbol{F}'_2 \wedge \boldsymbol{\mathcal{M}}'_1\big) \\
= &\Big(R\,\big(\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2\big),\ R\,\big(\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{\mathcal{M}}_2 - \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{\mathcal{M}}_1 + (R^{-1}\boldsymbol{a}) \wedge (\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2)\big)\ \Big)
\end{aligned} \tag{1.41}$$

autrement dit que l'opération $\wedge$ (1.40) définit bien un "torseur".