ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Dynamique du solide

Mécanique, cours 19.1

Jean-Philippe Ansermet

Dynamique du solide

Dynamique du solide

- Lois de la dynamique
- Moment cinétique du solide
- Tenseur d'inertie
- Moment d'inertie
- Energie cinétique de rotation

Loi de la dynamique

Pour tout système de point matériels :

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{M}_O^{ext} \qquad M\frac{d\boldsymbol{V}_G}{dt} = \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{ext}$$

Variante très utile :

$$\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = \boldsymbol{M}_G^{ext} \qquad \boldsymbol{L}_G = \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge m_\alpha(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}_\alpha)\} \qquad \boldsymbol{M}_G^{ext} = \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge \boldsymbol{F}_\alpha^{ext}\}$$

Démonstration :

$$\boldsymbol{L}_O = \sum_\alpha \{m_\alpha \boldsymbol{OP}_\alpha \wedge \left(\boldsymbol{V}_G + (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}_\alpha)\right)\}$$

$$\boldsymbol{L}_O = M\boldsymbol{OG} \wedge \boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{L}_G \qquad \frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{OG} \wedge \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{ext} + \frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt}$$

$$\boldsymbol{M}_O^{ext} = \sum_\alpha \{(\boldsymbol{OG} + \boldsymbol{GP}_\alpha) \wedge \boldsymbol{F}_\alpha^{ext}\} = \boldsymbol{OG} \wedge \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{ext} + \boldsymbol{M}_G^{ext}$$

Moment cinétique du solide

$$\boldsymbol{L}_G = \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge m_\alpha(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}_\alpha)\}$$

$$\boldsymbol{L}_G = \sum_\alpha m_\alpha \left[(\boldsymbol{GP}_\alpha \cdot \boldsymbol{GP}_\alpha)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{GP}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{GP}_\alpha\right]$$

Repère lié au solide :

$$(G, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$$

$$L_{G,i} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2 \omega_i - \sum_j GP_{\alpha,j}\omega_j GP_{\alpha,i}\right]$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2 \sum_j \delta_{ij}\omega_j - \sum_j GP_{\alpha,j}\omega_j GP_{\alpha,i}\right]$$

$$= \sum_j \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2\, \delta_{ij} - GP_{\alpha,j} GP_{\alpha,i}\right] \omega_j$$

$$L_{G,i} = \sum_j I_{ij}\, \omega_j \qquad I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2\, \delta_{ij} - GP_{\alpha,j} GP_{\alpha,i}\right]$$

Définition : tenseur d'inertie

$$L_{G,i} = \sum_j I_{ij}\,\omega_j$$

$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2\,\delta_{ij} - GP_{\alpha,j}GP_{\alpha,i}\right]$$

$$\boldsymbol{L}_G = I_G\,\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$I_{ij} = I_{ji}$$

Propriété mathématique : il existe toujours un repère tel que

$$\boldsymbol{L}_G = I_G\,\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I_{G1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

- Un tel repère, lié au solide, s'appelle un **repère d'inertie**.
- Les axes sont les « **axes principaux d'inertie** ».

Propriété : moment cinétique et vitesse angulaire

$$\boldsymbol{L}_G = I_G\,\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I_{G1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

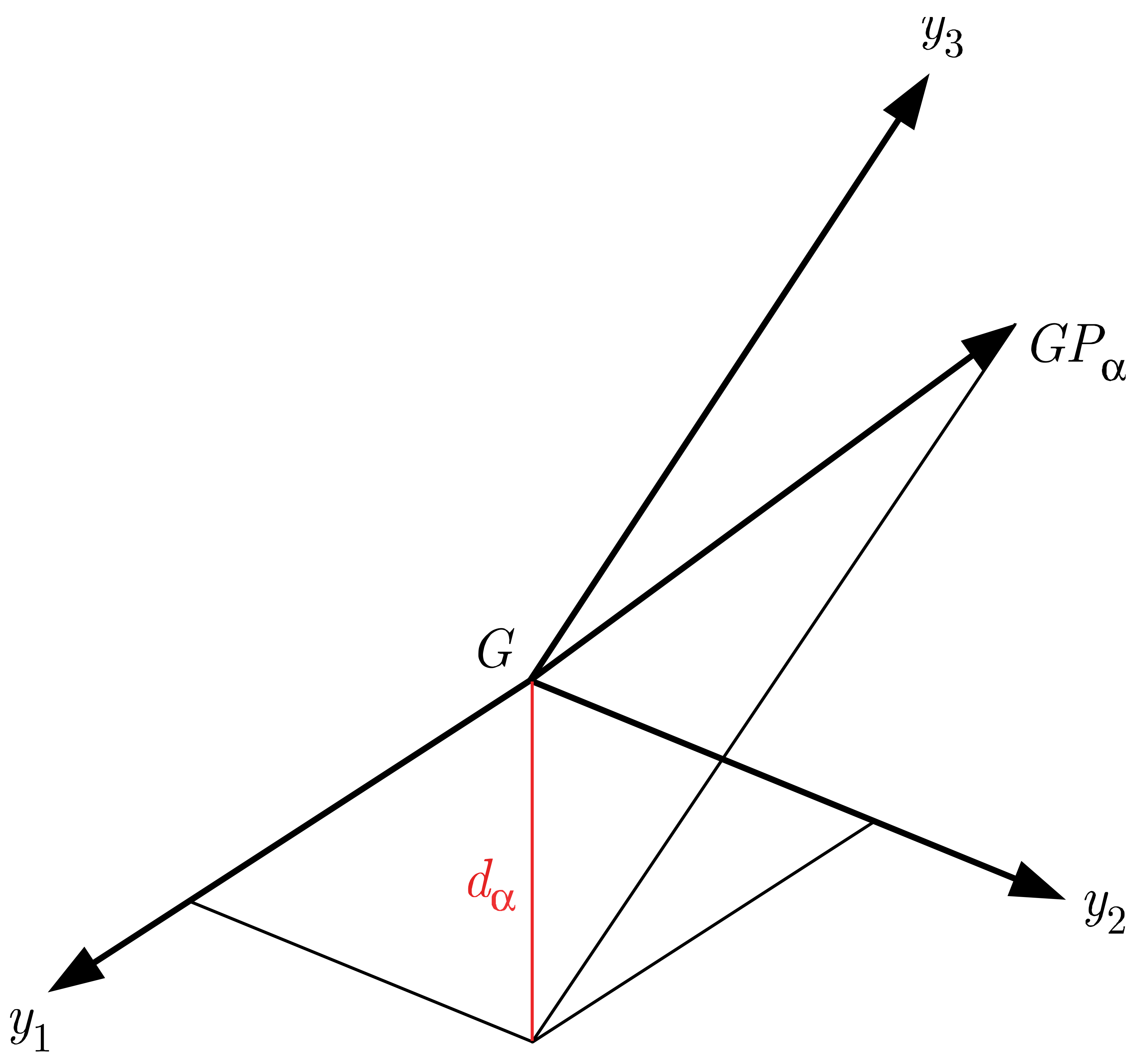
Vitesse angulaire et moment cinétique parallèles ?

$$\begin{pmatrix} L_{G1} \\ L_{G2} \\ L_{G3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{G1}\omega_1 \\ I_{G2}\omega_2 \\ I_{G3}\omega_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Si et seulement si un ω_i non nul.

Il faut que la vitesse angulaire soit le long d'un axe principal d'inertie !

Définition : moment d'inertie



$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2\,\delta_{ij} - GP_{\alpha,j}GP_{\alpha,i}\right]$$

Pour tout axe Δ, pris comme 3ème axe de coordonnée :

$$I_{33} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2 - GP_{\alpha,3}GP_{\alpha,3}\right]$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha [GP_{\alpha,1}GP_{\alpha,1} + GP_{\alpha,2}GP_{\alpha,2}]$$

$$I_\Delta = \sum_\alpha m_\alpha\, d_\alpha^2$$

Diagonale du tenseur d'inertie : moments d'inertie

Propriété : énergie cinétique, axe fixe

Rotation autour d'un axe Δ fixe :

Chaque masse m_α
- mouvement circulaire,
- de rayon d_α,
- à la vitesse angulaire ω.

$$E_{cin} = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha^2 = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \left(d_\alpha \omega\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha d_\alpha^2 \, \omega^2 = \frac{1}{2} I_\Delta \, \omega^2$$