ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Projections des grandeurs vectorielles

Mécanique, cours 2.2

Jean-Philippe Ansermet

Projections des grandeurs vectorielles

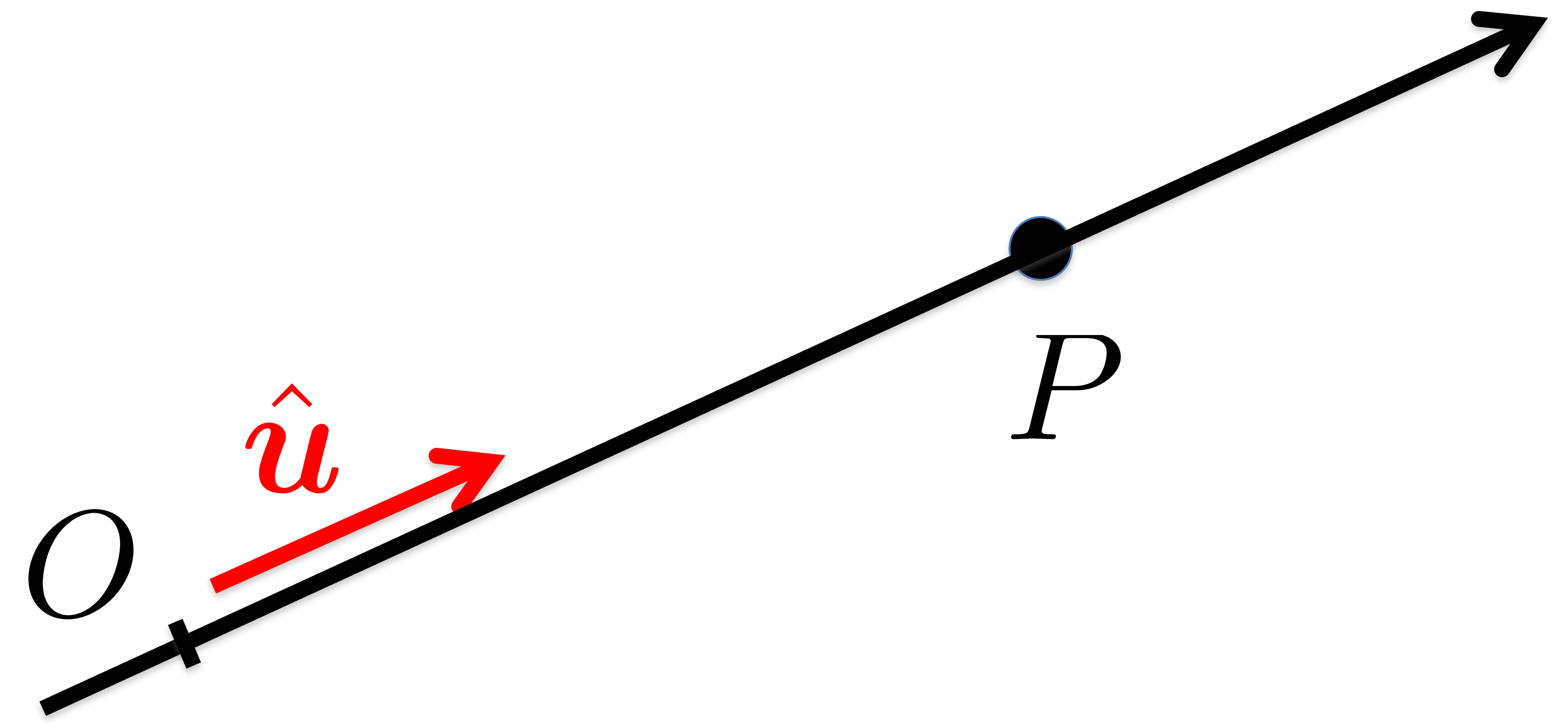
Projections des grandeurs vectorielles

- Repère
- Produit scalaire
- Produit vectoriel

Définition : le vecteur unité

Un vecteur de norme 1 (sans unité)

axe de coordonnée
O : son origine

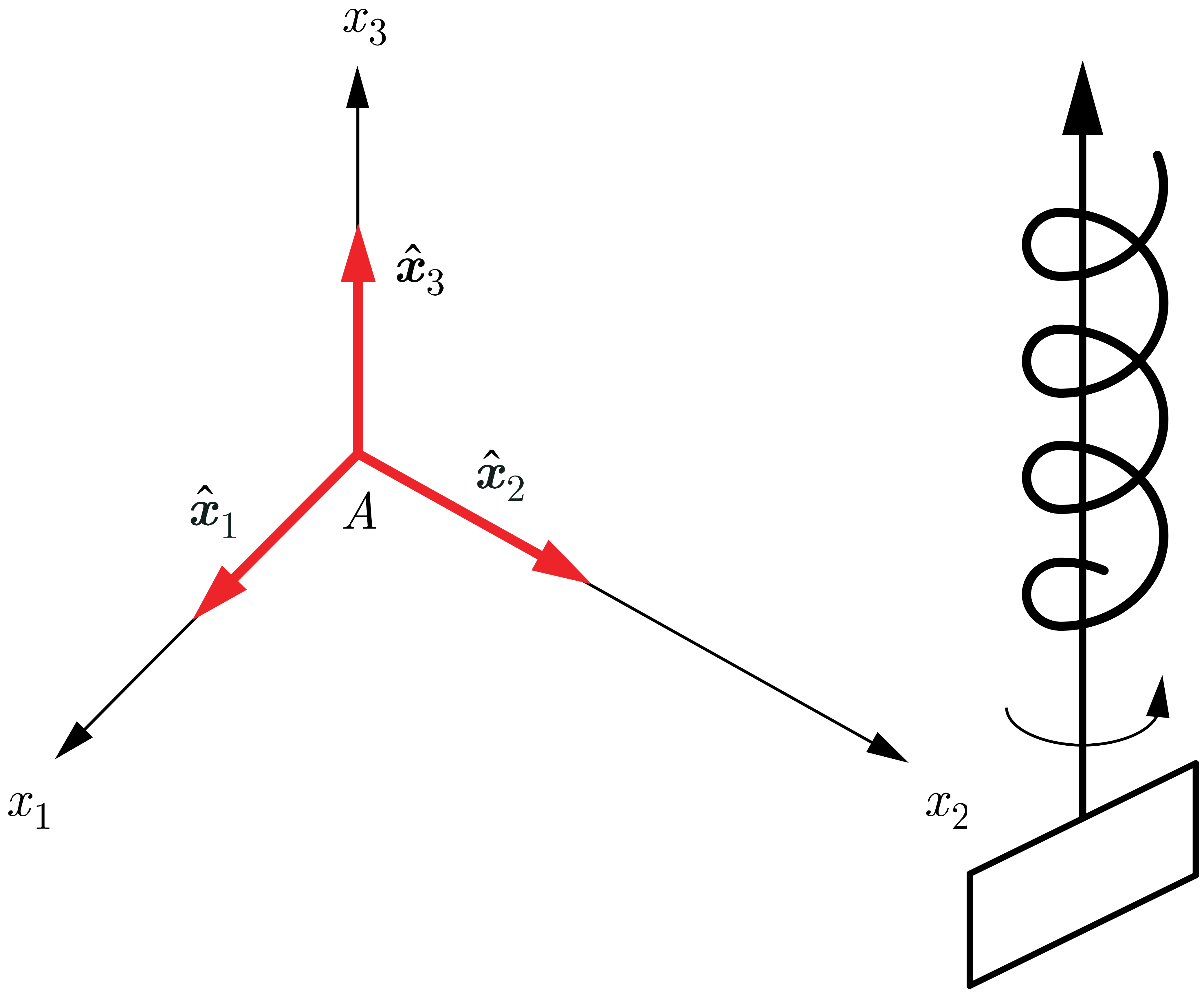


$$\boldsymbol{OP} = x\hat{\boldsymbol{u}}$$

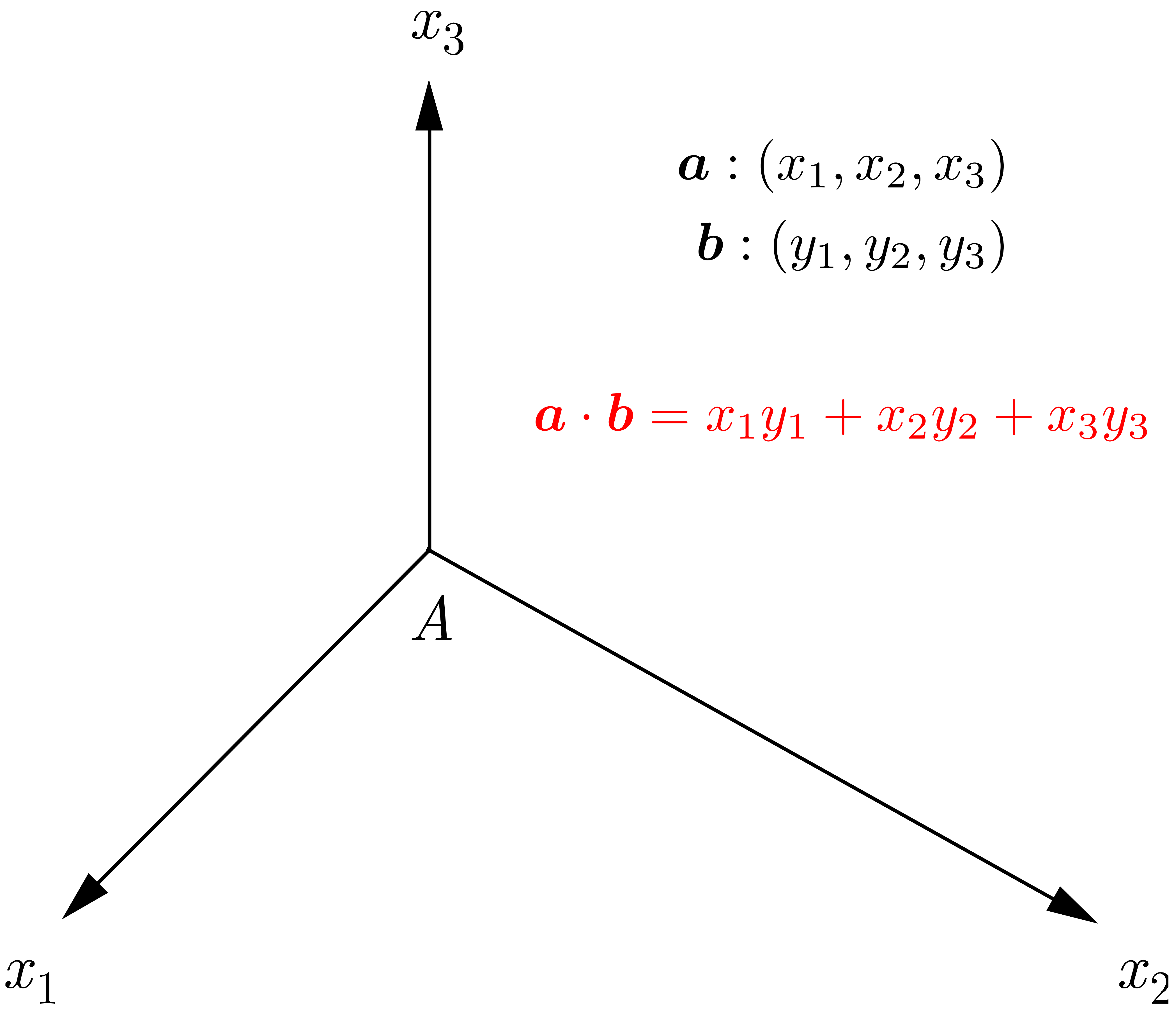
x : unité de distance

Définition : le repère

Un point et trois vecteurs unités, orthogonaux, « direct »



Définition : le produit scalaire



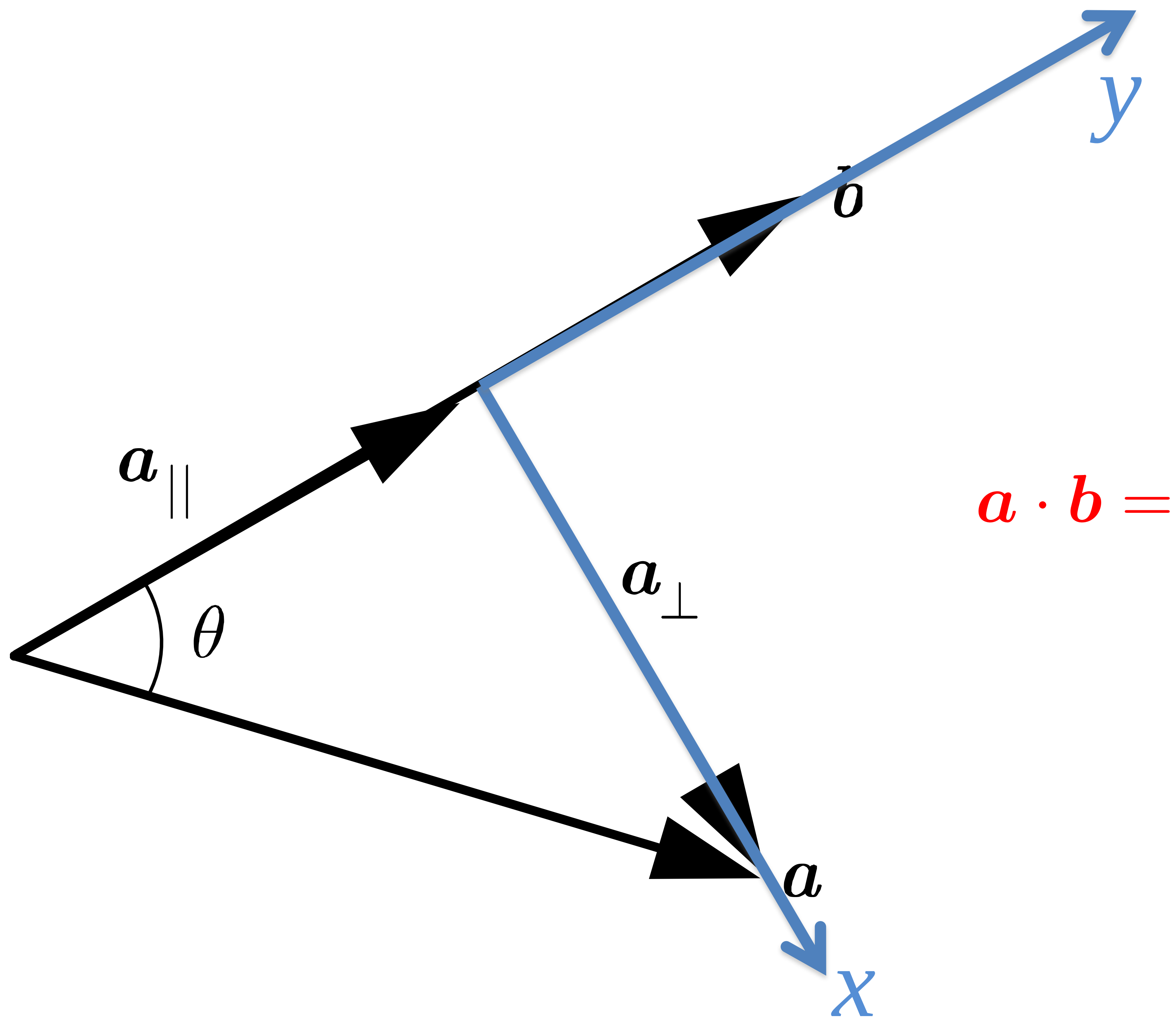
$$\boldsymbol{a} : (x_1, x_2, x_3)$$

$$\boldsymbol{b} : (y_1, y_2, y_3)$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

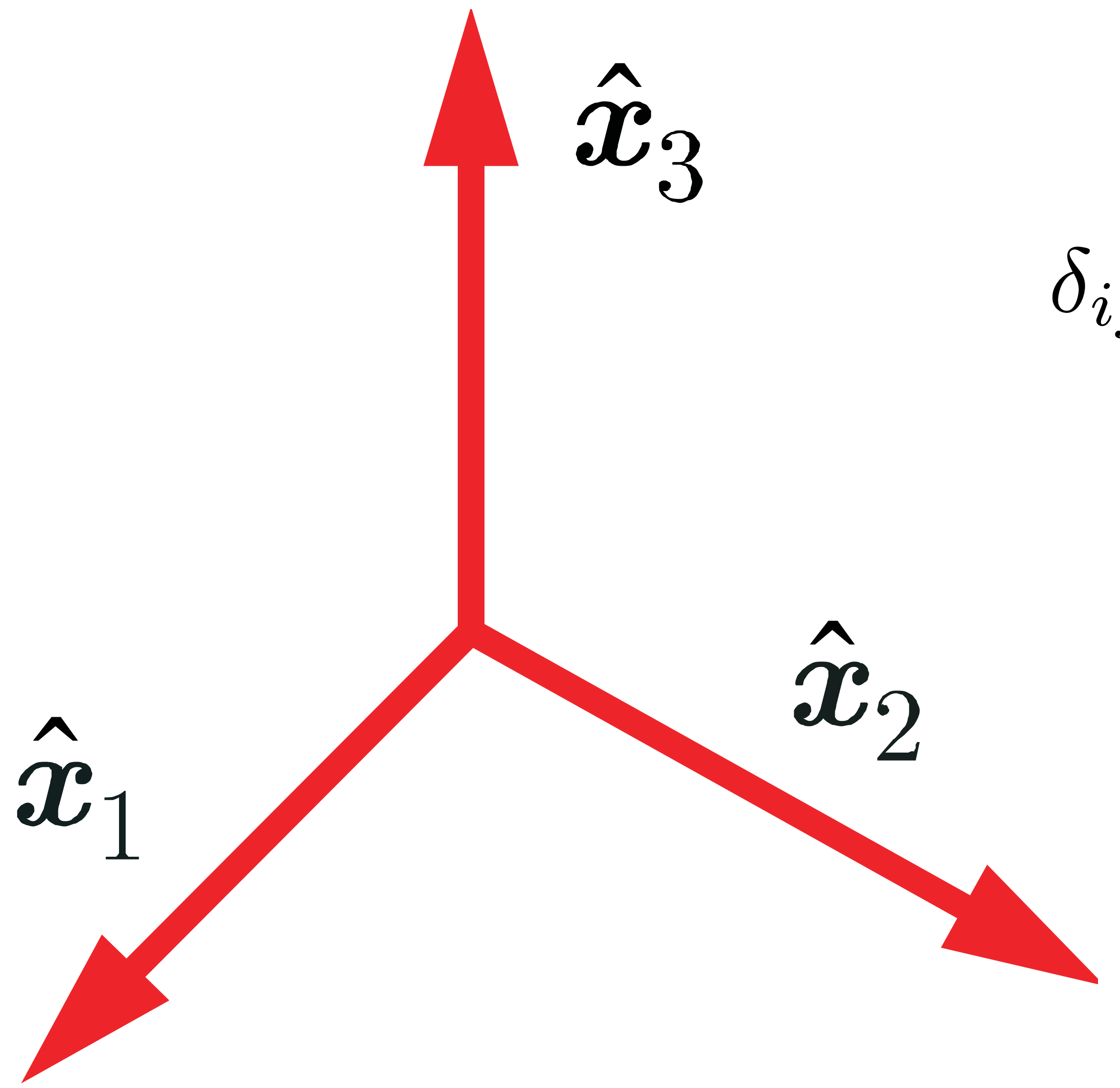
Propriétés du produit scalaire

$$\boldsymbol{a} : (|\boldsymbol{a}| \sin\theta, |\boldsymbol{a}| \cos\theta, 0) \qquad \boldsymbol{b} : (0, |\boldsymbol{b}|, 0)$$



$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$$

Orthogonalité des vecteurs unités d'un repère



$$\hat{\boldsymbol{x}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{x}}_j = \delta_{ij}$$

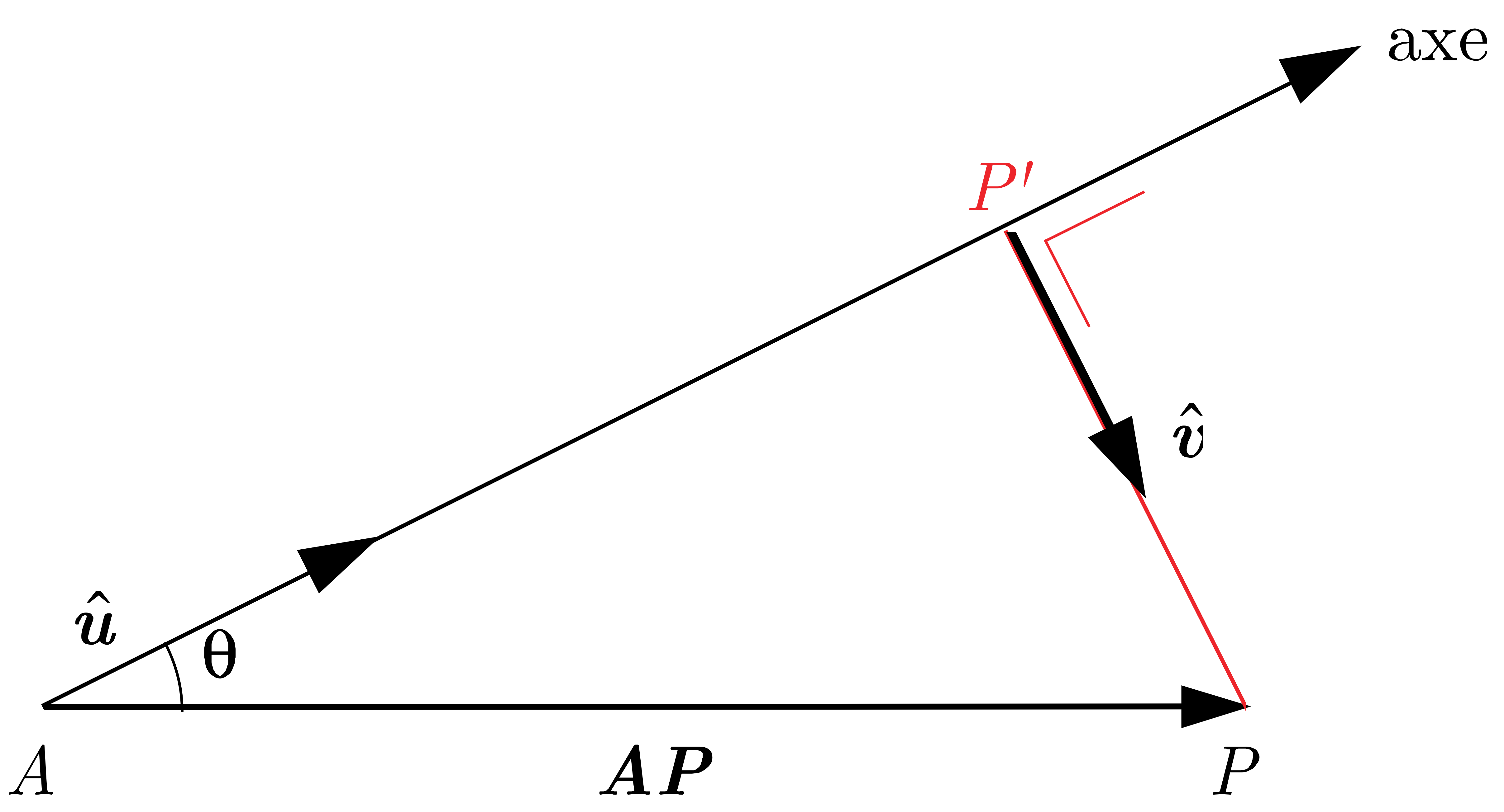
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1(i=j) \\ 0(i \neq j) \end{cases}$$

Définition : projection d'un vecteur sur un axe

$$\boldsymbol{AP} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = |\boldsymbol{AP}| cos\theta$$

$$\boldsymbol{AP} = (\boldsymbol{AP} \cdot \hat{\boldsymbol{u}})\hat{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{AP} \cdot \hat{\boldsymbol{v}})\hat{\boldsymbol{v}}$$

$$\boldsymbol{AP} = x_1\hat{\boldsymbol{x}}_1 + x_2\hat{\boldsymbol{x}}_2$$



Définition : Produit Vectoriel

$$\boldsymbol{a} : (a_1, a_2, a_3)$$
$$\boldsymbol{b} : (b_1, b_2, b_3)$$

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_1 & a_1 & b_1 \\ \hat{\boldsymbol{x}}_2 & a_2 & b_2 \\ \hat{\boldsymbol{x}}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \hat{\boldsymbol{x}}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \hat{\boldsymbol{x}}_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \hat{\boldsymbol{x}}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

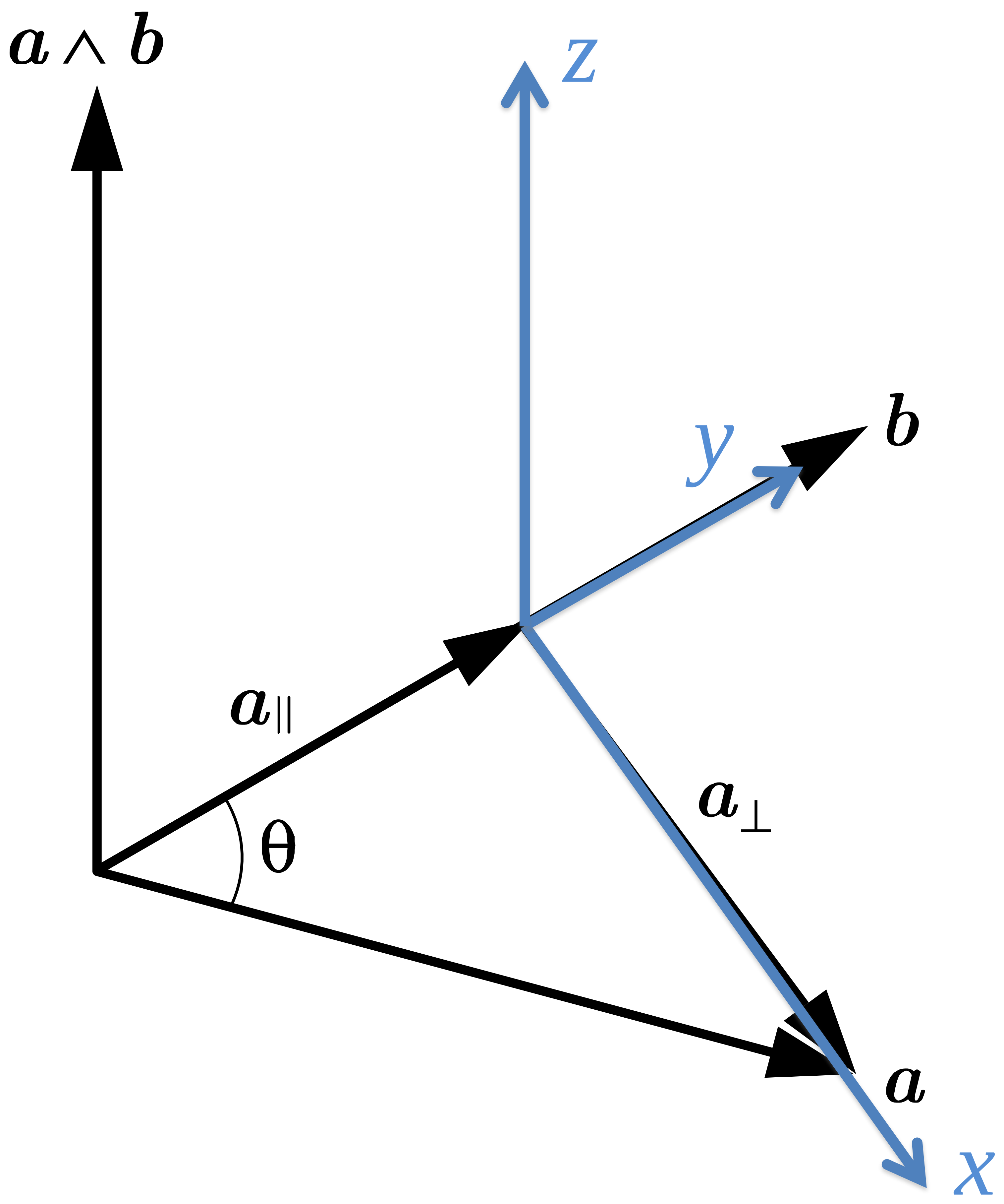
Propriétés du produit vectoriel

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = 0$$

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} = 0$$

Propriétés du produit vectoriel



$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & a\sin\theta & 0 \\ \hat{\boldsymbol{y}} & a\cos\theta & b \\ \hat{\boldsymbol{z}} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\sin\theta|$$

Propriétés du produit vectoriel

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_1 & a_1 & (b_2c_3 - b_3c_2) \\ \hat{\boldsymbol{x}}_2 & a_2 & (b_3c_1 - b_1c_3) \\ \hat{\boldsymbol{x}}_3 & a_3 & (b_1c_2 - b_2c_1) \end{vmatrix} = \cdots$$