

Solide avec un axe fixe

Mécanique, cours 20.1

Jean-Philippe Ansermet

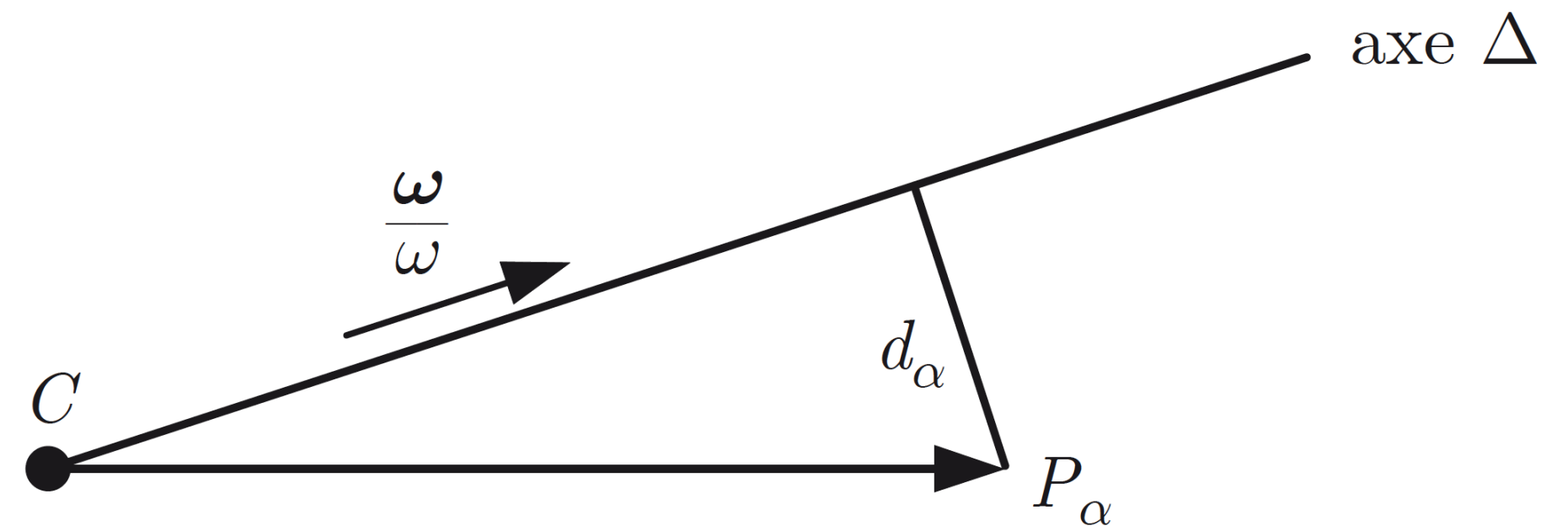
Solide avec un axe fixe

- Moment cinétique projeté sur l'axe
- Moment des forces projeté sur l'axe
- Pendule physique
- Treuil

Moment cinétique projeté sur l'axe fixe

ω : vitesse angulaire, constante.

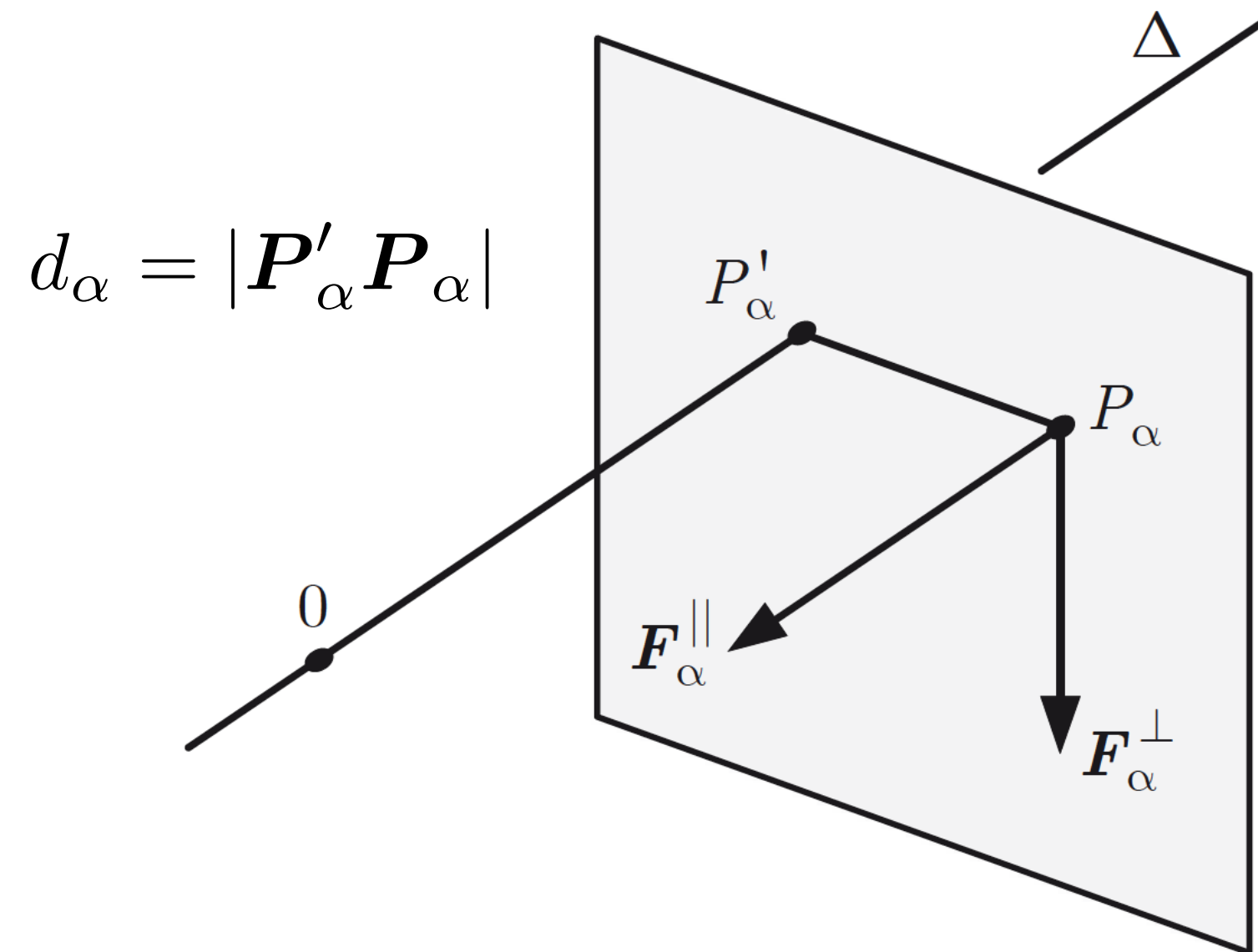
C : point du solide, sur l'axe, donc fixe.



$$\mathbf{L}_C = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{C}P_{\alpha} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{C}P_{\alpha}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} ((\mathbf{C}P_{\alpha} \cdot \mathbf{C}P_{\alpha})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{C}P_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{C}P_{\alpha})$$

$$\mathbf{L}_C \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} = \omega \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\mathbf{C}P_{\alpha} \cdot \mathbf{C}P_{\alpha} - \left(\mathbf{C}P_{\alpha} \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \right)^2 \right) = I_{\Delta} \omega$$

Moment des forces projeté sur l'axe fixe



$$M_O^{ext} = \sum_{\alpha} OP_\alpha \wedge F_\alpha$$

$$\hat{u} = \frac{\omega}{\omega} \quad O \equiv C$$

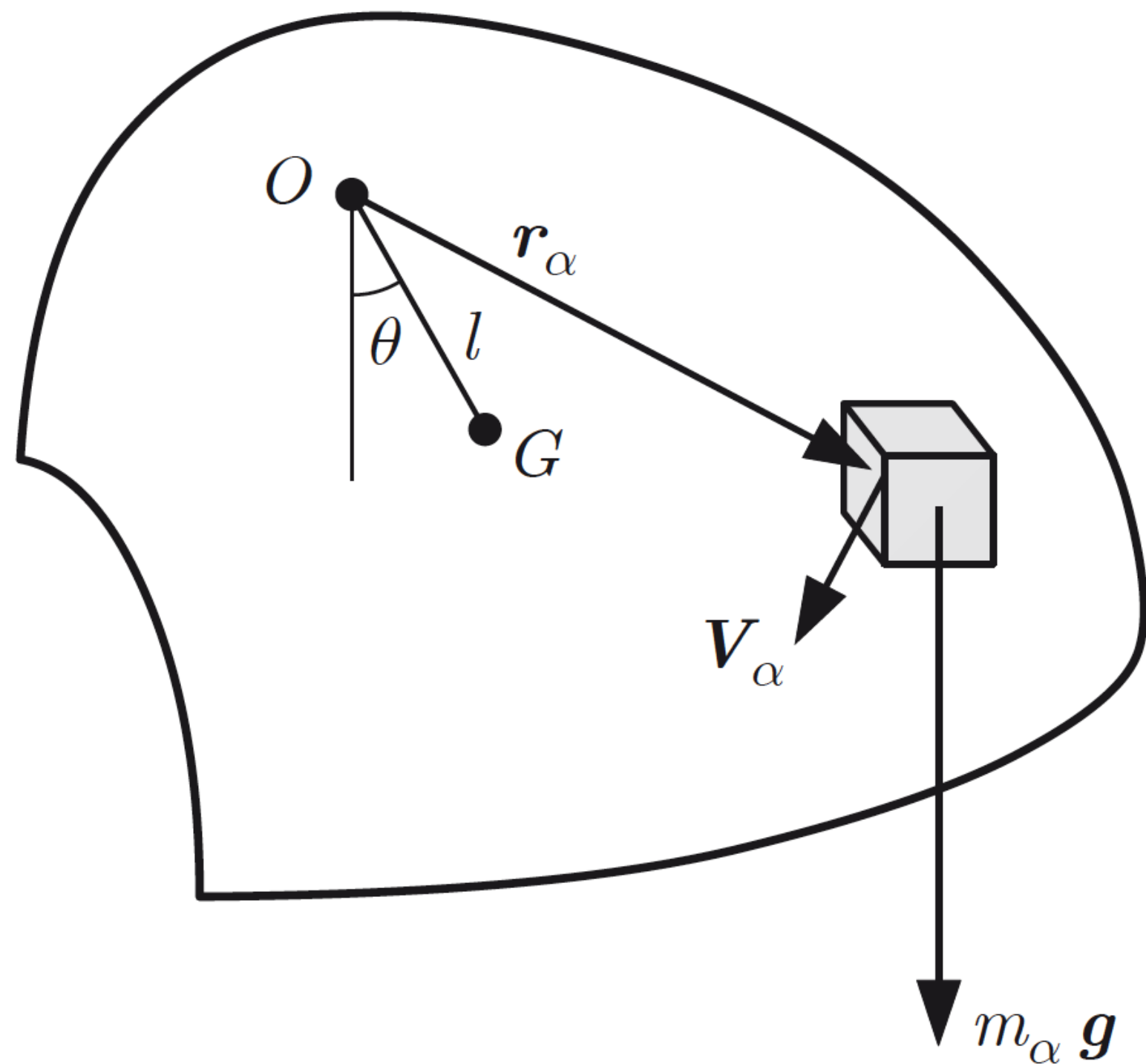
$$\begin{aligned} \hat{u} \cdot M_O^{ext} &= \hat{u} \cdot \sum_{\alpha} OP_\alpha \wedge F_\alpha \\ &= \hat{u} \cdot \sum_{\alpha} (OP'_\alpha + P'_\alpha P_\alpha) \wedge (F_\alpha^{\parallel} + F_\alpha^{\perp}) \\ &= \sum_{\alpha} |F_\alpha^{\perp}| d_\alpha \sin(\text{angle}(P'_\alpha P_\alpha, F_\alpha^{\perp})) \end{aligned}$$

Equation du mouvement, axe fixe

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = \mathbf{M}_C^{ext} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{L}_C)$$

$$I_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \sum_{\alpha} |\mathbf{F}_\alpha^\perp| d_\alpha \sin \left(\text{angle}(\mathbf{P}'_\alpha \mathbf{P}_\alpha, \mathbf{F}_\alpha^\perp) \right)$$

Exemple : pendule physique



Rotation d'axe horizontal en O

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{u}} = -\dot{\theta} \hat{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{M}_O = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \wedge \mathbf{g} = M \mathbf{OG} \wedge \mathbf{g}$$

$$-I_{\Delta} \ddot{\theta} = M g l \sin \theta$$

Approximation du pendule mathématique

$$I_{\Delta} \approx M l^2 \implies \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Exemple : treuil libre et masse suspendue

Cylindre d'axe horizontal :

- de rayon R
- de moment d'inertie I_{Δ}
- de vitesse angulaire ω

Charge au bout du fil enroulé :

- de masse m
- à la verticale du treuil

Moment cinétique total projeté sur l'axe fixe : $I_{\Delta}\omega + mR^2\omega$

Moment des forces extérieures, projeté sur l'axe fixe : Rmg

Equation du mouvement : $I_{\Delta}\dot{\omega} + mR^2\dot{\omega} = Rmg$