

# Aperçu de dynamique relativiste

**Mécanique, cours 24.1**

Jean-Philippe Ansermet

# Aperçu de dynamique relativiste

---

- Quadri-vecteur
- Energie-quantité de mouvement
- Quantité de mouvement
- Energie

Vecteur de l'espace-temps :

- une composante temporelle :  $ct$
- trois composantes spatiales :  $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$
- une métrique :  $-c^2t^2 + \boldsymbol{x}^2$

Quadri-vecteur :  $(ct, \boldsymbol{x})$

# Quadri-vecteur énergie-quantité de mouvement

Quantité de mouvement doit prendre la forme  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\frac{d\mathbf{x}}{dt}$

quand on change de référentiel et que la vitesse devient  $\ll c$ .

$$\mathbf{p} = m\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$$

La masse est une constante physique, un invariant relativiste.

$$p^0 = m\frac{d(ct)}{d\tau} = mc\frac{dt}{d\tau}$$

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Quadri-vecteur  $(p^0, \mathbf{p})$

# Quantité de mouvement et vitesse

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \qquad \mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau}$$

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots$$

C'est l'énergie cinétique plus un terme :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\frac{E}{c^2} \mathbf{v} = \mathbf{p} \longrightarrow \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{\mathbf{p}c}{E}$$

$$(p^0, \mathbf{p}) \longrightarrow -(p^0)^2 + \mathbf{p}^2 = -\frac{E^2}{c^2} + \mathbf{p}^2 = -\frac{m^2c^2}{1 - v^2/c^2} + \frac{m^2v^2}{1 - v^2/c^2} = -m^2c^2$$

'Condition de masse' :

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4}$$

- Le quadrivecteur énergie-quantité de mouvement est une grandeur conservée dans un système isolé.
- En particulier c'est le cas dans une collision.
- Il y a donc conservation de l'énergie définie par la formule relativiste.
- Mais ... quand deux particules s'accolent, la masse finale n'est pas égale à la somme des masses initiales !

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

En relativité, l'énergie d'une particule au repos est définie par :

$$E = mc^2$$

Energie cinétique :

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2$$

La dynamique doit rester celle de Newton quand on utilise un référentiel où la vitesse de la particule est faible.

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{F}$$

# Propriété : théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{F} \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \mathbf{v} d\tau = \mathbf{F} \mathbf{v} d\tau$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \mathbf{v} d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbf{F} \mathbf{v} d\tau = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} d\mathbf{r}$$

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \mathbf{v} d\tau &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dp}{dv} \frac{dv}{d\tau} \mathbf{v} d\tau = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dp}{dv} \mathbf{v} dv = [p\mathbf{v}]_{v_1}^{v_2} - \int_{v_1}^{v_2} p dv = \left[ \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right]_{v_1}^{v_2} - \int_{v_1}^{v_2} \frac{mvdv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ &= \left[ \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right]_{v_1}^{v_2} + \left[ mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2} \right]_{v_1}^{v_2} = \left[ \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right]_{v_1}^{v_2} = T_2 - T_1 \end{aligned}$$