ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Expériences : contraintes holonomes

Mécanique, cours 25.exp

Jean-Philippe Ansermet

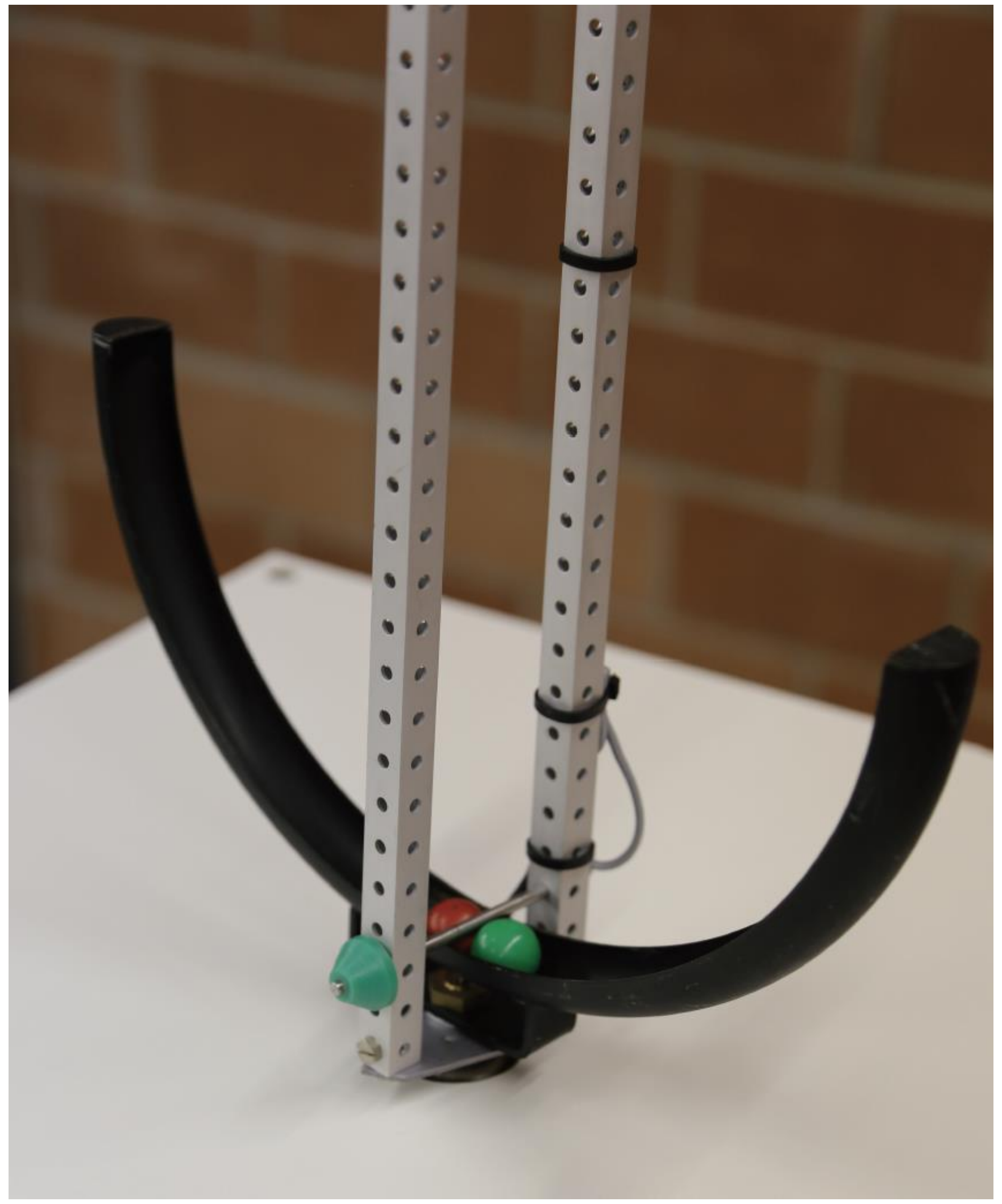
Expériences : contraintes holonomes

- Contrainte indépendante du temps
- Contrainte dépendante du temps
- Stabilité d'un équilibre
- Petites oscillations autour d'un équilibre stable
- Mode « mou »

Contrainte indépendante du temps

- Contrainte indépendante du temps : point matériel astreint à se déplacer sur une surface dans le référentiel.

Contrainte dépendante du temps

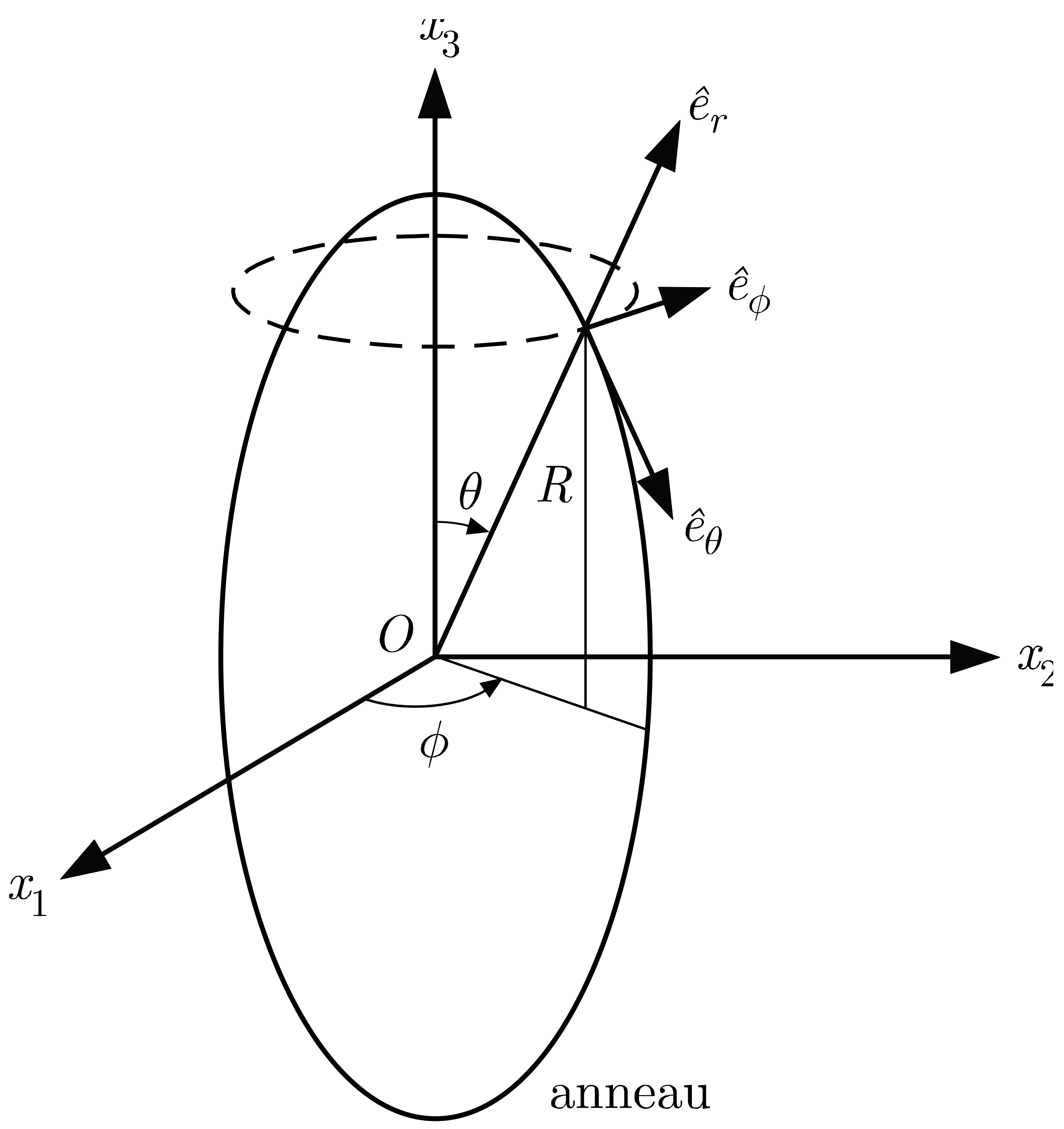


- Contrainte dépendante du temps : point matériel astreint à se déplacer sur un cercle en rotation uniforme d'axe vertical.
- Le déplacement virtuel est le long de l'anneau, différent du déplacement réel pendant un temps donné.

Equilibre et petites oscillations

- Anneau en rotation : la bille oscille autour d’une position d’équilibre. Quelle est cette position ?
- Quelle est cette fréquence ?
- Pratiquement, les frottements font que la bille s’immobilise rapidement à sa position d’équilibre.

Méthode de Lagrange



$$\text{Vitesse} : \boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\text{Contraintes} : r = R \qquad \phi = \omega t$$

$$\text{Energie cinétique} : T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta$$

$$\text{Energie potentielle} : V = mgR\cos\theta$$

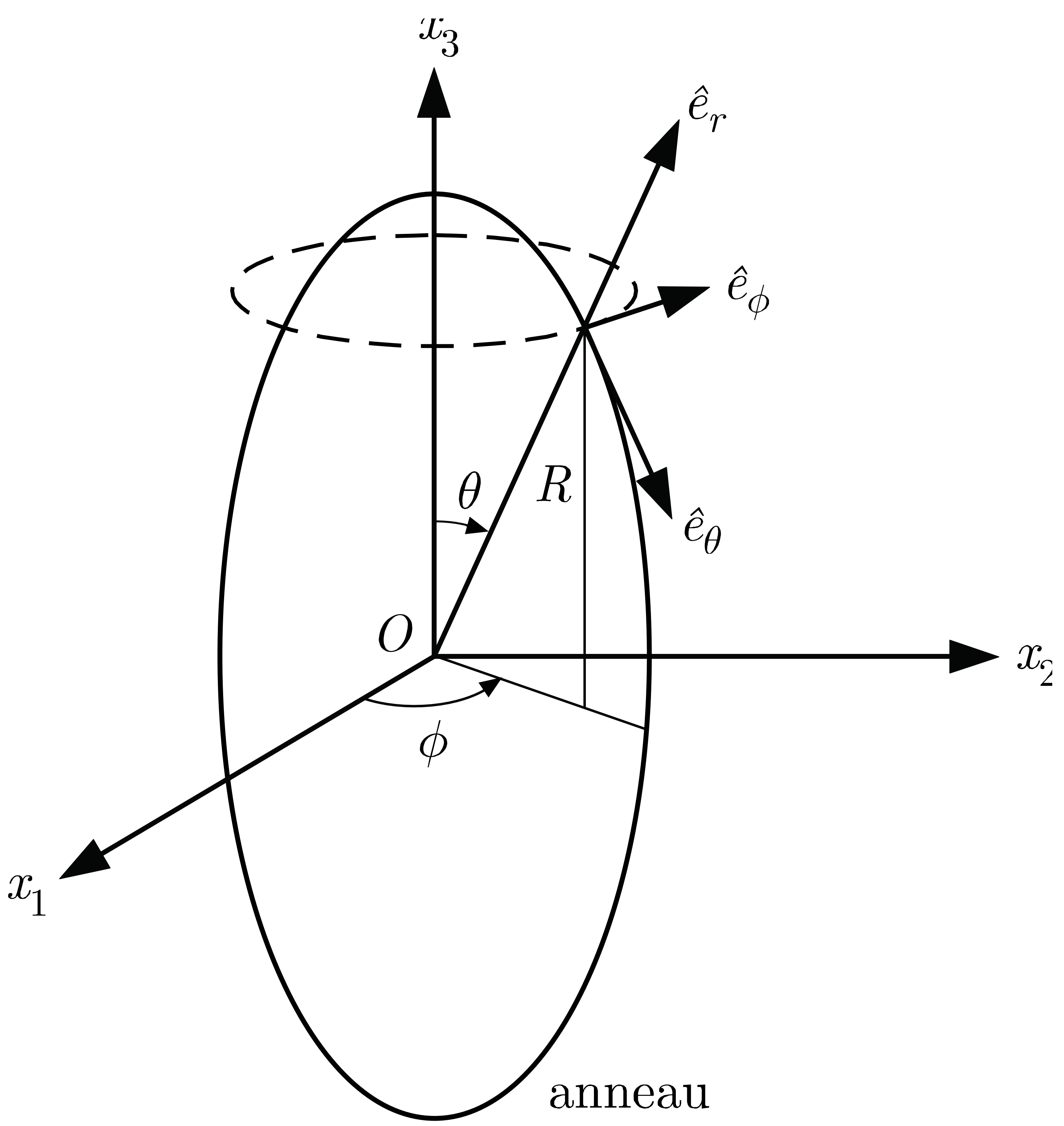
$$\text{Lagrangien} : L = T - V$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mR^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} - \omega^2\sin\theta\cos\theta - \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

Equilibres relatifs



$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

équilibre relatif : $\ddot{\theta} = 0$

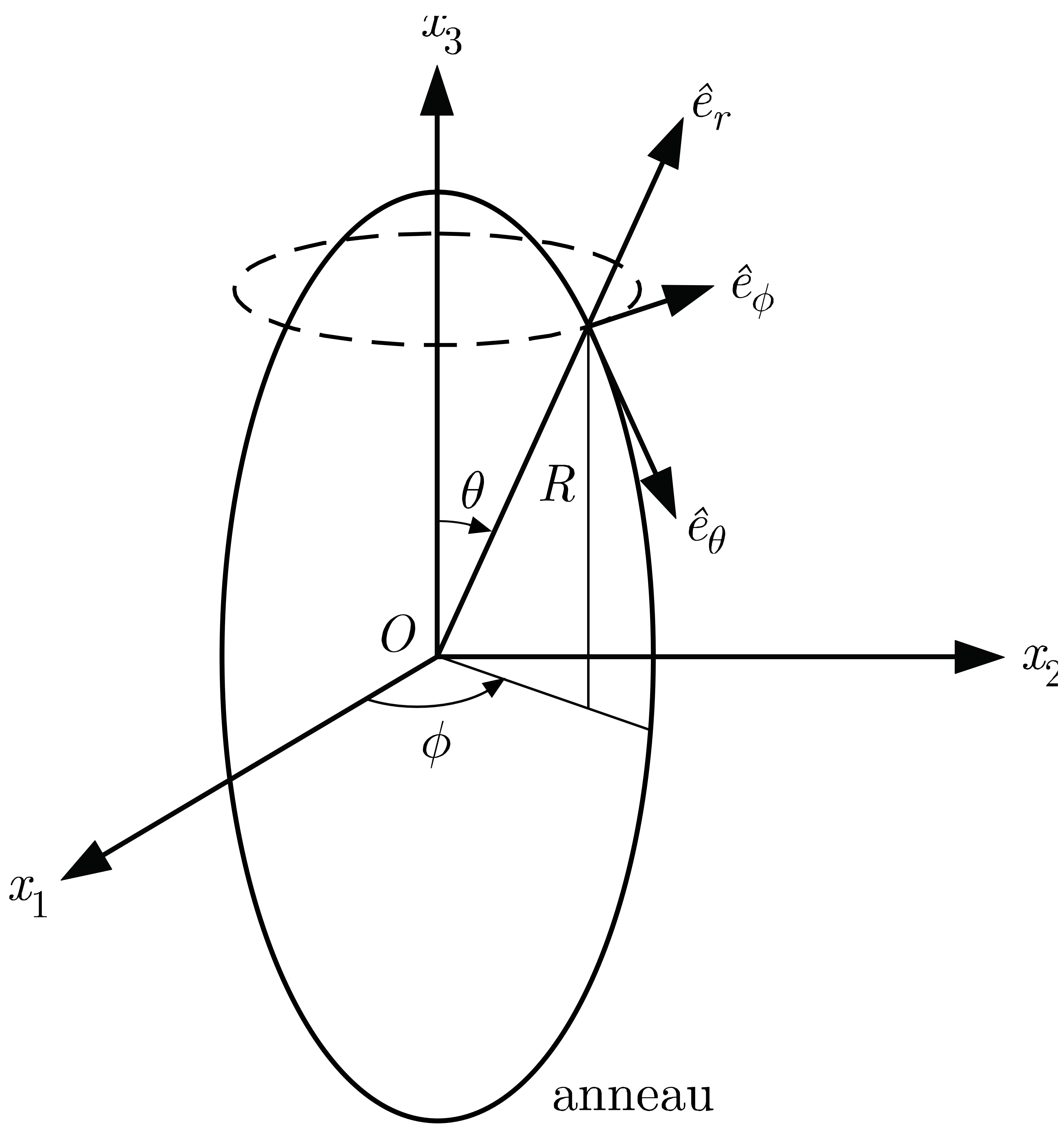
$$\sin\theta_e\cos\theta_e = -\frac{g}{R\omega^2}\sin\theta_e$$

Trois solutions : $\theta_e = 0; \quad \theta_e = \pi; \quad \cos\theta_e = \dfrac{-g}{\omega^2 R}$

$$\cos\theta_e < 0 \implies \frac{\pi}{2} \le \theta_e \le \pi$$

$$|\cos\theta_e| < 1 \implies \omega \ge \omega_c = \sqrt{g/R}$$

Stabilité des équilibres



Petites oscillations autour de l'équilibre : $\theta = \theta_e + \delta\theta$

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

équation dynamique au 1er ordre en $\delta\theta \ll 1$

$\theta_e = 0$ $\quad \ddot{\delta\theta} = \left(\omega^2 + \frac{g}{R}\right)\delta\theta \quad$ toujours instable

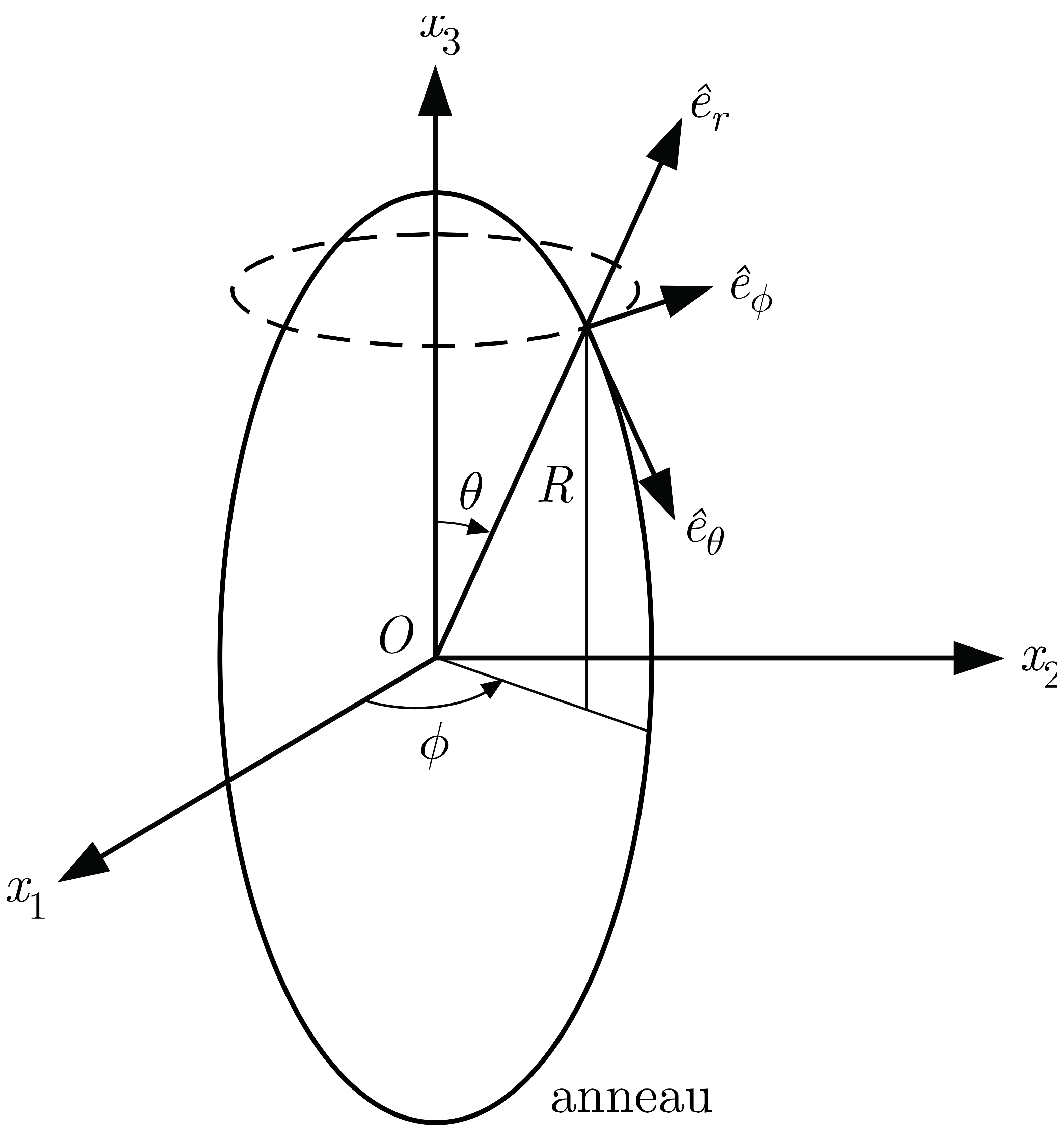
$\theta_e = \pi$

$\theta = \pi + \delta\theta \quad \cos(\pi + \delta\theta) \approx -1 \quad \sin(\pi+\delta\theta) \approx -\delta\theta$

$\ddot{\delta\theta} = -\left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)\delta\theta \quad$ stable si $|\omega| < \omega_c$

instable si $|\omega| > \omega_c$

Stabilité des équilibres



Petites oscillations autour de l'équilibre : $\theta = \theta_e + \delta\theta$

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{g}{R}\sin\theta = 0 \qquad \cos\theta_e = \frac{-g}{\omega^2 R}$$

équation dynamique au 1er ordre en $\delta\theta \ll 1$

$$\ddot{\delta\theta} - \omega^2 \sin(\theta_e + \delta\theta)\cos(\theta_e + \delta\theta) = \frac{g}{R}\sin(\theta_e + \delta\theta)$$

$$\ddot{\delta\theta} - \omega^2 \big[\sin(\theta_e) + \delta\theta\cos(\theta_e)\big]\big[\cos(\theta_e) - \delta\theta\sin(\theta_e)\big] = \frac{g}{R}\big[\sin(\theta_e) + \delta\theta\cos(\theta_e)\big]$$

$$\ddot{\delta\theta} - \omega^2\,\delta\theta\big[-\sin^2(\theta_e) + \cos^2(\theta_e)\big] = \frac{g}{R}\,\delta\theta\cos(\theta_e)$$

$$\ddot{\delta\theta} = -\omega^2\sin^2(\theta_e)\,\delta\theta$$

Mode “mou” de la bille dans l’anneau en rotation