ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Symétries et conservations

Mécanique, cours 26.1

Jean-Philippe Ansermet

Symétries et conservations

Symétries et conservations

- Variable cyclique
- Symétrie de translation
- Symétrie de rotation
- Energie

Définition : quantité de mouvement généralisée

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

p_j quantité de mouvement généralisée
associée à chaque coordonnée généralisée q_j

Propriété : variable cyclique et conservation

q_j ***cyclique*** si L ne dépend pas de q_j

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\,p_j$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

p_j constante du mouvement

Symétrie de translation et conservation

Système de N points matériels en $\boldsymbol{x}_i$, $(i = 1, .., N)$

forces conservatives, potentiel $V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)$

$\hat{\boldsymbol{n}}$ dans le référentiel tel que pour tout s :

$$V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) = V\big(\boldsymbol{x}_1 + s\,\hat{\boldsymbol{n}}, \ldots, \boldsymbol{x}_N + s\,\hat{\boldsymbol{n}}\big)$$

$$0 = \frac{dL\big(\boldsymbol{x}_1 + s\,\hat{\boldsymbol{n}}, \ldots, \boldsymbol{x}_N + s\,\hat{\boldsymbol{n}}, \dot{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{x}}_N, t\big)}{ds} = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha i}}\, n_i = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha i}}\right) n_i$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{\alpha i}}\right) n_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\, \dot{\boldsymbol{x}}_\alpha\right) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\, \dot{\boldsymbol{x}}_\alpha = \boldsymbol{P} \quad \text{quantité de mouvement totale}$$

$\boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ grandeur conservée

Théorème de Noether : translation

Système de N points matériels en $\boldsymbol{x}_i$, $(i = 1, .., N)$

forces conservatives, potentiel $V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)$

S'il existe $\hat{\boldsymbol{n}}$ dans le référentiel tel que pour tout s :

$$V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) = V\big(\boldsymbol{x}_1 + s\,\hat{\boldsymbol{n}}, \ldots, \boldsymbol{x}_N + s\,\hat{\boldsymbol{n}}\big)$$

$\boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ grandeur conservée

Symétrie de rotation et conservation

$$V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) = V(\boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x}_N)$$

$\boldsymbol{R}_\theta$ axe passant par l'origine O, d'orientation $\hat{\boldsymbol{n}}$, d'angle θ

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x}_\alpha = \boldsymbol{x}_\alpha + \theta\, \hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_\alpha \qquad \theta \text{ petit}$$

$$0 = \frac{dL(\boldsymbol{x}_1 + \theta\, \hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{x}}_N, t)}{d\theta} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha i}} \left(\hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_\alpha\right)_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha i}}\right) \left(\hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_\alpha\right)_i$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{d\boldsymbol{p}_\alpha}{dt}\right)_i \left(\hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{x}_\alpha\right)_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} (\hat{\boldsymbol{n}})_i \left(\boldsymbol{x}_\alpha \wedge \frac{d\boldsymbol{p}_\alpha}{dt}\right)_i = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\boldsymbol{x}_\alpha \wedge \frac{d\boldsymbol{p}_\alpha}{dt}\right)$$

$$= \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{x}_\alpha \wedge \boldsymbol{p}_\alpha\right) = \frac{d}{dt} \left(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{L}_O\right) \qquad \boldsymbol{L}_O = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\boldsymbol{x}_\alpha \wedge \boldsymbol{p}_\alpha\right)$$

Théorème de Noether : rotation

$$V(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) = V(\boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x}_N)$$

$\boldsymbol{R}_\theta$ axe passant par l'origine,

d'orientation $\hat{\boldsymbol{n}}$, d'angle θ

$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{L}_O$ conservée

Autre grandeur conservée

Si L ne dépend pas **explicitement** du temps $\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L$ est une grandeur conservée

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\dot{q}_j\right) - \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\dot{q}_j\right) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\ddot{q}_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j}\,\dot{q}_j$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\dot{q}_j\right) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\ddot{q}_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j = 0$$

Conservation de l'énergie mécanique

Si L ne dépend pas **explicitement** du temps

Si les contraintes ne dépendent pas du temps

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L$$

grandeur conservée, est l'énergie mécanique

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

En général, pour un point matériel : $\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$ $\Longrightarrow T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\sum_{k=i}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_j} \dot{q}_j = 2T$$

$$\mathcal{H} = 2T - L = T + V$$

Symétries et conservations

- Conservation de la quantité de mouvement
- Conservation du moment cinétique
- Conservation de l'énergie