ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Principe de moindre action

## Mécanique, cours 26.2

Jean-Philippe Ansermet

# Principe de moindre action

# Principe de moindre action

- Définition : l’action
- Le principe de moindre action
- Détermination des forces de contraintes

# Définition : l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\big(q_1(t), \ldots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_n(t), t\big)\, dt$$

# Principe de moindre action

Equations de Lagrange $\Leftrightarrow$ Extremum de l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\big(q, \dot{q}, t\big)\, dt$$

Soit $q(t)$ la fonction pour laquelle on a l'extremum.

On examine une petite variation $q(t) + \delta q(t)$

On impose $\delta q(t_1) = 0$ et $\delta q(t_2) = 0$.

# Principe de moindre action

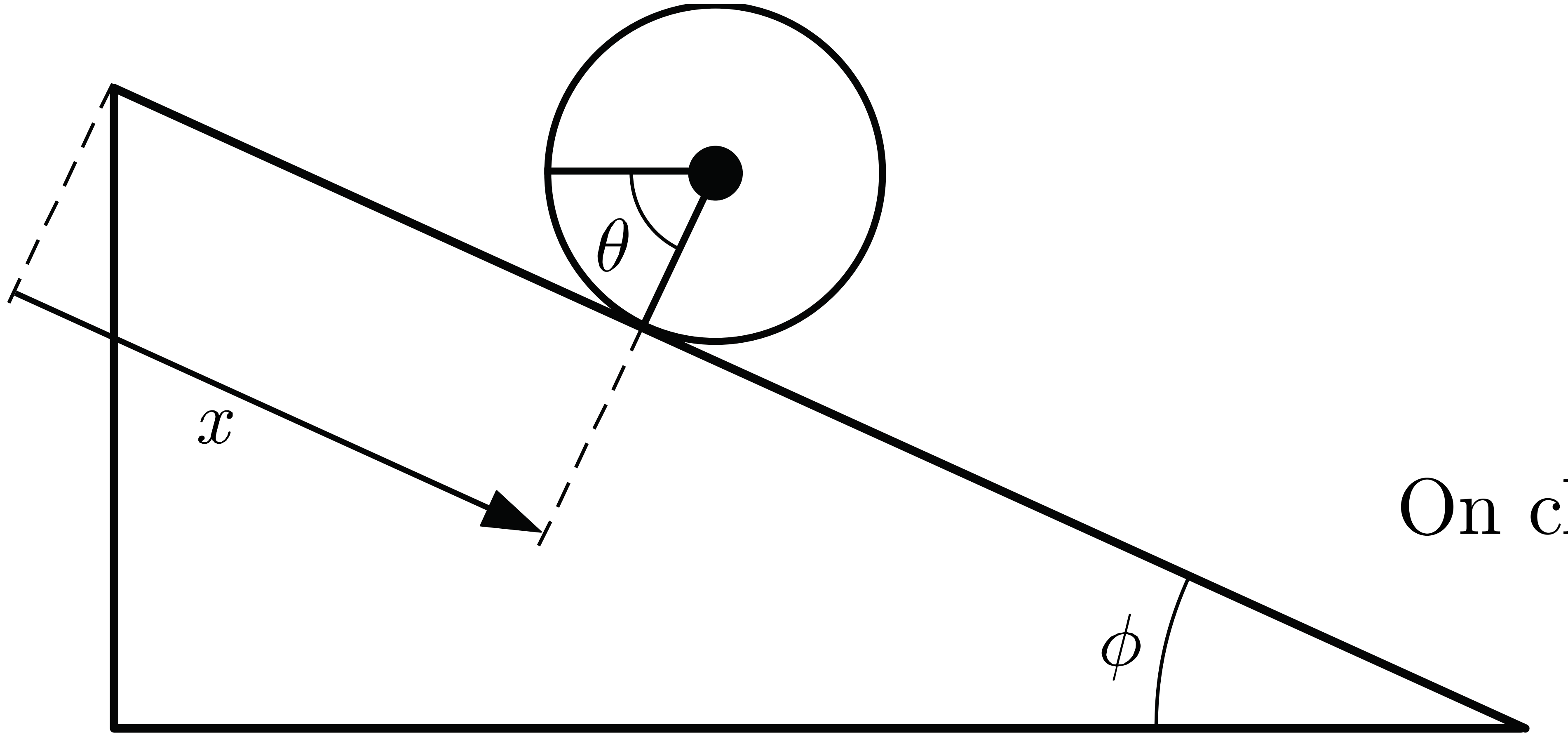
$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L\big(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t\big)\, dt - L\big(q, \dot{q}, t\big)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}_{u}\, \underbrace{\delta\dot{q}\Big)\, dt}_{dv}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q\, dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta q \right]_{t_1}^{t_2} - \int \delta q \frac{d}{dt}\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q\, dt$$

$$\text{Pour tout } \delta q(t) \implies \text{Lagrange}$$

# Application : forces de contraintes




$$L = \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + Mgx\sin\phi$$

On garde deux degrés de liberté.

On cherche un extremum de l'action sous la contrainte $x = R\theta$.

Méthode des multiplicateurs de Lagrange : on considère

$$L' = \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + Mgx\sin\phi - F(x - R\theta)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}} = I_\Delta \dot{\theta} \qquad \frac{\partial L'}{\partial \theta} = FR \qquad I_\Delta \ddot{\theta} = FR$$

théorème du moment cinétique

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} \qquad \frac{\partial L'}{\partial x} = Mg\sin\phi - F \qquad M\ddot{x} = Mg\sin\phi - F$$

théorème du centre de masse