ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Systèmes vibratoires discrets, linéaires

Mécanique, cours 27.1

Jean-Philippe Ansermet

Systèmes vibratoires discrets, linéaires

Systèmes vibratoires discrets, linéaires

- Systèmes vibratoires
- Modes propres
- Coordonnées propres

Définition : systèmes vibratoires discrets, linéaires

N points matériels, masses m_i $(i = 1 \ldots N)$

n degrés de liberté

$$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_n),\ i = 1, \ldots, 3N$$

Le système est en équilibre stable à $(q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{n0})$

Petites oscillations autour de cet équilibre

$$\eta_i = q_i - q_{i0} \to 0$$

Application de la méthode de Lagrange

Energie cinétique

$$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_n),\ i = 1, \ldots, 3N \qquad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\,\dot{q}_j$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 \quad = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\,\dot{q}_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\,\dot{q}_k\right)$$

$$T_{jk} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\,\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \qquad T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} T_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k$$

Application de la méthode de Lagrange

Energie potentielle

$$V(q_1, q_2, \ldots, q_n) = V(q_{10}, \ldots, q_{n0}) + \sum_i \left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{\text{éq}} \eta_i + \frac{1}{2}\sum_{\ell m} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_\ell \partial q_m}\right|_{\text{éq}} \eta_\ell\, \eta_m$$

$$\eta_i = q_i - q_{i0} \qquad V_{\ell m} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_\ell \partial q_m}\right|_{\text{éq}} \qquad V(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \frac{1}{2}\sum_{\ell m} V_{lm}\, \eta_\ell\, \eta_m$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} T_{jk}\dot{\eta}_j\dot{\eta}_k \qquad T_{jk} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left.\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right|_{\text{éq}} \left.\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right|_{\text{éq}}$$

Lagrangien :

$$L = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(T_{jk}\dot{\eta}_j\dot{\eta}_k - V_{jk}\eta_j\eta_k\right)$$

Application de la méthode de Lagrange

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(T_{jk} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k - V_{jk} \eta_j \eta_k \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_i} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(T_{ik} \ddot{\eta}_k + V_{ik} \eta_k \right) = 0 \qquad (i = 1 \ldots n)$$

Application de la méthode de Lagrange

$$\text{Vecteur :} \qquad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_\ell \end{pmatrix}$$

$$\text{Matrice T :} \qquad T_{jk} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left.\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right|_{\text{éq}} \left.\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right|_{\text{éq}}$$

$$\text{Matrice V :} \qquad V_{\ell m} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_\ell \partial q_m}\right|_{\text{éq}}$$

$$T\ddot{\boldsymbol{\eta}} = -V\boldsymbol{\eta}$$

Diagonalisation

$$T\ddot{\boldsymbol{\eta}} = -V\boldsymbol{\eta}$$

$$T_D = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & T_{nn} \end{pmatrix}$$

T réelle et symétrique $\Longrightarrow$ T est diagonalisable : $T = U^{-1} T_D U$

U orthogonale ($U^{-1}_{ij} = U_{ji}$)

$$T = U^{-1}\sqrt{T_D}\,\sqrt{T_D}\,U \;= U^{-1}\sqrt{T_D}UU^{-1}\sqrt{T_D}\,U \;= \sqrt{M}\,\sqrt{M}$$

$$\sqrt{M} = U^{-1}\sqrt{T_D}\,U$$

$\sqrt{M}$ est symétrique

$$(\sqrt{M}\,)_{ij} = \sum_{lm} U^{-1}_{il}(\sqrt{T_D}\,)_{lm} U_{mj} \;= \sum_{lm} U^{-1}_{jm}(\sqrt{T_D}\,)_{ml} U_{li} = (\sqrt{M}\,)_{ji}$$

$\dfrac{1}{\sqrt{M}} = \sqrt{M}^{-1}$ est aussi symétrique

Diagonalisation

$$T\ddot{\boldsymbol{\eta}} = -V\boldsymbol{\eta}$$

$$\sqrt{M}\,\ddot{\boldsymbol{\eta}} = -\frac{1}{\sqrt{M}}V\frac{1}{\sqrt{M}}\sqrt{M}\,\boldsymbol{\eta}$$

$$\boldsymbol{X} = \sqrt{M}\boldsymbol{\eta} \qquad D = \frac{1}{\sqrt{M}}V\frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = -D\boldsymbol{X}$$

D est symétrique : $$D_{ij} = \sum_{lm}\left(\sqrt{M}^{-1}\right)_{il}V_{lm}\left(\sqrt{M}^{-1}\right)_{mj} = D_{ji}$$

Définition : modes propres, fréquences propres

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = -D\boldsymbol{X}$$

$$\ddot{\boldsymbol{v}}_i = -\lambda_i \boldsymbol{v}_i$$

$$\frac{\sqrt{\lambda_i}}{2\pi} \ : \ \text{fréquence propre}$$

$$i = 1 \ldots n$$

$$\boldsymbol{v}_i \ : \ \text{mode propre}$$

Définition : coordonnées propres

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = -D\boldsymbol{X}$$

D réelle symétrique $\Longrightarrow$ il existe une matrice O : $D = O^{-1} D_\lambda O$ D_λ diagonal

$$O\ddot{\boldsymbol{X}} = -D_\lambda O\boldsymbol{X}$$

Changement de variable : $\boldsymbol{x} = O\boldsymbol{X}$ $\ddot{\boldsymbol{x}} = -D_\lambda \boldsymbol{x}$

$$\ddot{x}_i = -\lambda_i x_i \qquad \lambda_i \ (i = 1 \ldots n)$$

x_i coordonnée propre, oscille avec la pulsation : $\sqrt{\lambda_i}$

$$x_i = (O\boldsymbol{X})_i = \sum_k O_{ik} X_k = \sum_k O_{ik} (\sqrt{M}\boldsymbol{\eta})_k = \sum_{k\ell} O_{ik} \sqrt{M}_{k\ell}\, \eta_\ell$$