ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Résonance paramétrique

## Mécanique, cours 28.1

Jean-Philippe Ansermet

# Résonance paramétrique

# Résonance paramétrique

- Equation du mouvement
- Base standard
- Translation dans le temps
- Stabilité

# Exemple : équation de Hill

$$\ddot{x} + G(t)x = 0$$

$$G(t+\tau) = G(t)$$

$$\tau \ : \ \text{période de } G(t)$$

# Exemple : équation de Mathieu

$$y'' + (p - 2q\cos(2\bar{t})\,)\,y = 0$$

$$\text{période :}\quad \bar{\tau} = \pi$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{d\bar{t}^{\,2}}$$

# Propriété : linéarité

$$\ddot{x}_1 + G(t)x_1 = 0 \qquad \ddot{x}_2 + G(t)x_2 = 0$$

$$x = \alpha x_1 + \beta x_2$$

$$\begin{aligned}\ddot{x} = \alpha\ddot{x}_1 + \beta\ddot{x}_2 &= -\alpha G(t)x_1 - \beta G(t)x_2 \\ &= -G(t)\left(\alpha x_1 + \beta x_2\right) \\ &= -G(t)x\end{aligned}$$

# Définition : base standard

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ \dot{e}_1 & \dot{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ \dot{e}_1 & \dot{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ \dot{e}_1 & \dot{e}_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\dot{W} = \dot{e}_1 \dot{e}_2 + e_1 \ddot{e}_2 - \ddot{e}_1 e_2 - \dot{e}_1 \dot{e}_2 = 0$$

$$W = x_0 v_0 \quad \neq 0$$

| $e_1(t)$ | $e_2(t)$ |
| --- | --- |
| $e_1(0) = x_0$ | $e_2(0) = 0$ |
| $\dot{e}_1(0) = 0$ | $\dot{e}_2(0) = v_0$ |

linéairement indépendantes :

$$e_1 + b e_2 = c e_1 \implies b = 0 \text{ et } c = 1$$

# Espace vectoriel des solutions

$$x(t) = ae_1(t) + be_2(t)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

# Translation dans le temps

$x(t)$ solution, alors

$x(t+\tau)$ aussi solution

Démonstration :

$$t' = t + \tau \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'}\frac{d(t+\tau)}{dt} = \frac{dx}{dt'} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt'^2}$$

$$\ddot{x} + G(t)x = 0 \qquad \frac{d^2x(t)}{dt^2} + G(t)x(t) = 0 \qquad \frac{d^2x(t+\tau)}{d(t+\tau)^2} + G(t+\tau)x(t+\tau) = 0$$

$$\frac{d^2x(t+\tau)}{dt^2} + G(t)x(t+\tau) = 0$$

cqfd

# Matrice d'avancée d'une période

$$x(t) = ae_1(t) + be_2(t)$$

$$x(t+\tau) = a'e_1(t) + b'e_2(t)$$

$$e_1(t+\tau) = r_{11}e_1(t) + r_{21}e_2(t)$$

$$e_2(t+\tau) = r_{12}e_1(t) + r_{22}e_2(t)$$

$$\begin{aligned} x(t+\tau) = ae_1(t+\tau) + be_2(t+\tau) &= a[r_{11}e_1(t) + r_{21}e_2(t)] + b[r_{12}e_1(t) + r_{22}e_2(t)] \\ &= (ar_{11} + br_{12})e_1(t) + (ar_{21} + br_{22})e_2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t+\tau) = R\mathbf{x}(t)$$

# Matrice d'avancée d'une période

$$e_1(t+\tau) = r_{11}e_1(t) + r_{21}e_2(t)$$

$$e_2(t+\tau) = r_{12}e_1(t) + r_{22}e_2(t)$$

$$\dot{e}_1(t+\tau) = r_{11}\dot{e}_1(t) + r_{21}\dot{e}_2(t)$$

$$\dot{e}_2(t+\tau) = r_{12}\dot{e}_1(t) + r_{22}\dot{e}_2(t)$$

$$R = \begin{pmatrix} e_1(\tau)/x_0 & e_2(\tau)/x_0 \\ \dot{e}_1(\tau)/v_0 & \dot{e}_2(\tau)/v_0 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ \dot{e}_1 & \dot{e}_2 \end{vmatrix} = x_0 v_0$$

$$det(R) = \frac{e_1(\tau)\dot{e}_2(\tau) - \dot{e}_1(\tau)e_2(\tau)}{x_0 v_0} = 1$$

# Résonance paramétrique

$$\begin{pmatrix} e_1(\tau)/x_0 & e_2(\tau)/x_0 \\ \dot{e}_1(\tau)/v_0 & \dot{e}_2(\tau)/v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{e_1(\tau)}{x_0} - \rho\right)\left(\frac{\dot{e}_2(\tau)}{v_0} - \rho\right) - \frac{\dot{e}_1(\tau)e_2(\tau)}{x_0 v_0} = 0$$

$$\rho^2 - \rho\left(\frac{e_1(\tau)}{x_0} + \frac{\dot{e}_2(\tau)}{v_0}\right) + 1 = 0$$

$$T = Tr(R) = \frac{e_1(\tau)}{x_0} + \frac{\dot{e}_2(\tau)}{v_0} = \rho_+ + \rho_-$$

$$\rho_\pm = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4}}{2}$$

$$t = n\tau + t' \qquad \mathbf{x}(t) = R^n \mathbf{x}(t')$$

Diagonalisation : $R = U^{-1} R_D U$

$$\mathbf{x}(t) = R^n \mathbf{x}(t') = U^{-1} R_D^n U \mathbf{x}(t')$$

$$R_D = \begin{pmatrix} \rho_+ & 0 \\ 0 & \rho_- \end{pmatrix}$$

$$det(R) = \rho_+ \rho_- = 1$$

# Solutions instables

$$\rho_\pm = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4}}{2}$$

$$T^2 > 4$$

$$\mathbf{x}(t) = R^n \mathbf{x}(t')$$

$$n \to \infty \implies \rho_i^n \to \infty \quad (i = + \text{ ou } -)$$

# Solutions stables

$$\rho_\pm = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4}}{2}$$

$$T^2 < 4$$

$$\rho_\pm = \frac{T \pm i\sqrt{4 - T^2}}{2}$$

$$|\rho\pm| = 1$$

$$\rho_\pm = e^{\pm i\phi}$$

# Solutions stables

$$\rho_{\pm} = e^{\pm i\phi} \qquad \phi \neq 0 \text{ et } \phi \neq \pi$$

changement de base pour diagonaliser R :

$$\{e_1(t), e_2(t)\} \to \{\bar{e}_1(t), \bar{e}_2(t)\}$$

$$\bar{e}_k(t+\tau) = e^{\pm i\phi}\bar{e}_k(t) \quad (k = 1,\, 2)$$

$$\bar{e}_k(t) = e^{\pm i\phi t}u_k(t) \quad (k = 1,\, 2)$$

$u_k(t)$ est une fonction périodique, de période $\tau$

Démonstration :

$$u_k(t) = e^{\mp i\phi t/\tau}\bar{e}_k(t)$$

$$u_k(t+\tau) = e^{\mp i\phi t/\tau}e^{\mp\phi}\bar{e}_k(t+\tau) = e^{\mp i\phi t/\tau}\bar{e}_k(t) = u_k(t)$$

# Solutions stables

$\phi = 0$

$$\bar{e}_k(t+\tau) = e^{\pm i\phi}\bar{e}_k(t)$$

$$\bar{e}_k(t+\tau) = \bar{e}_k(t)$$

les fonctions $\bar{e}_k(t)$ sont des ***fonctions de période*** $\tau$

$\phi = \pi$

$$\bar{e}_k(t+2\tau) = (-1)^2\bar{e}_k(t)$$

les fonctions $\bar{e}_k(t)$ sont des ***fonctions de période*** $2\tau$