ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Balistique avec frottement

Mécanique, cours 4.2

Jean-Philippe Ansermet

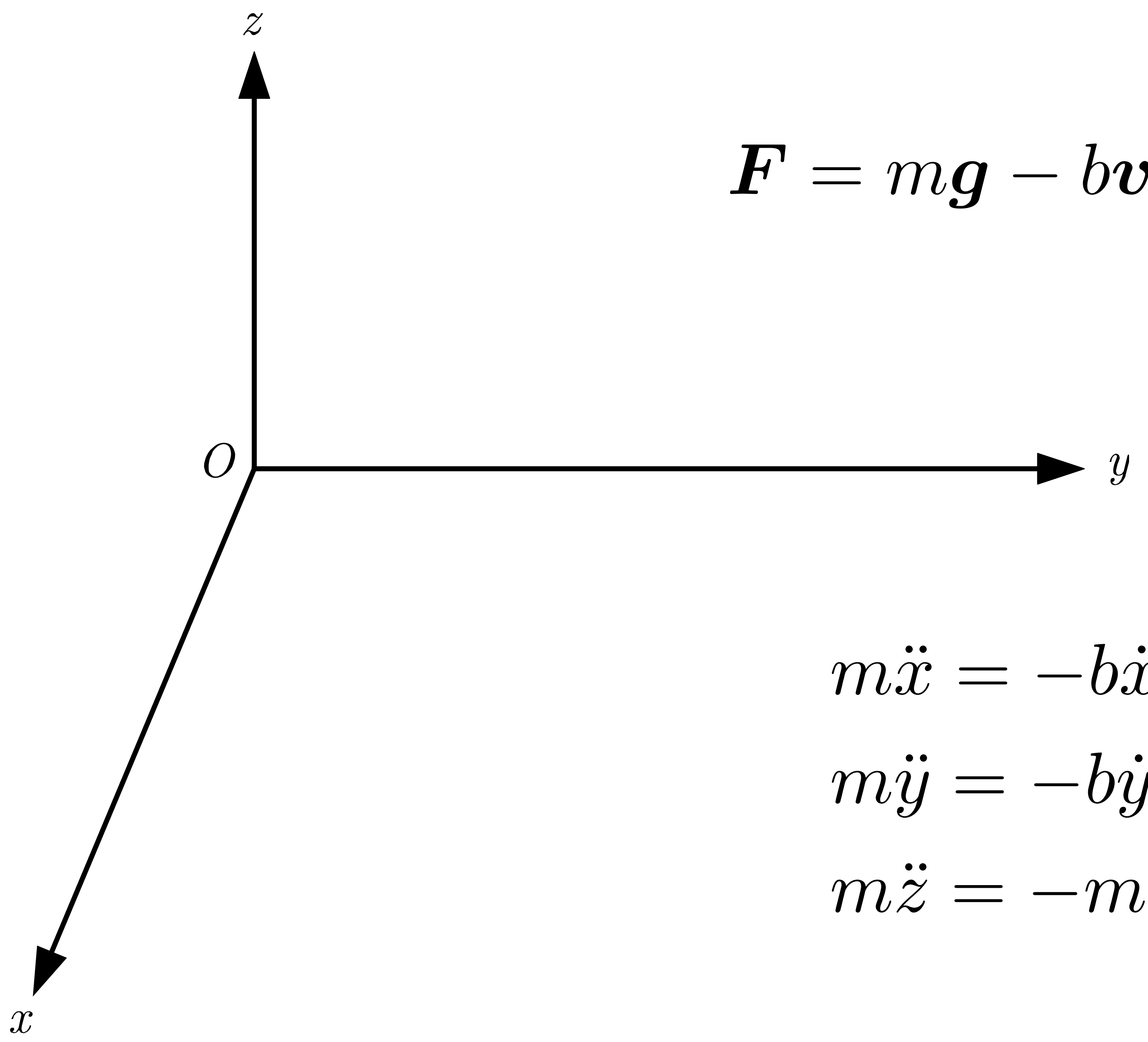
Balistique avec frottement

Balistique avec frottement

- Modèle pour la résistance de l'air
- Exponentielle
- Comportement asymptotique
- Mouvement vertical

Modèle de force

- Pesanteur suffisamment bon ?
- Effet du frottement de l'air, modèle de force proportionnelle à la vitesse



$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} - b\boldsymbol{v} \quad (b > 0)$$

$$m\ddot{x} = -b\dot{x}$$
$$m\ddot{y} = -b\dot{y}$$
$$m\ddot{z} = -mg - b\dot{z}$$

Exponentielle

Equation du mouvement : $\ddot{x} = -\dfrac{b}{m}\,\dot{x}$

Changement de variable : $\dot{x} = v$

$$\dot{v} = -\frac{b}{m}\,v$$

Notation : $\tau = \dfrac{m}{b}$

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau}\,v$$

$$v(t) = \dot{x}(0)\exp(-t/\tau)$$

Exponentielle

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(0)\exp(-t/\tau)$$

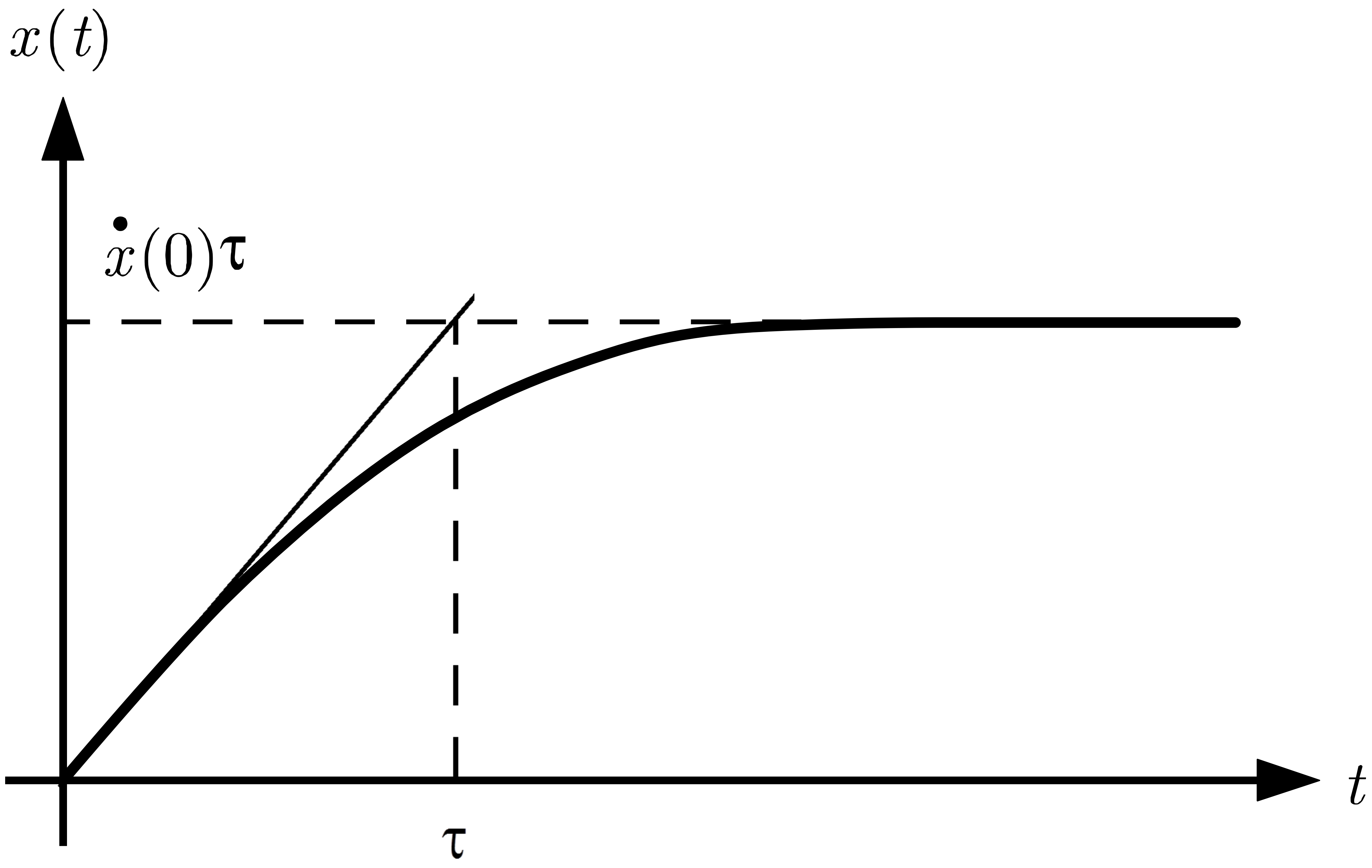
$$\text{Intégration : } x(t) = -\dot{x}(0)\tau\exp\left(-t/\tau\right) + A$$

$$\text{Condition initiale : } x(0) = -\dot{x}(0)\tau + A = 0$$

$$x(t) = \dot{x}(0)\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Exponentielle

$t \to \infty \qquad x(t) = \dot{x}(0)\tau \qquad x(t) = \dot{x}(0)\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$



$$\frac{df}{dt} \approx \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt}$$

$$f(t+\Delta t) \approx f(t) + \frac{df}{dt}\Delta t$$

$$x(0+t) \approx x(0) + \frac{df}{dt}t$$

$t \to 0 \qquad x(t) = \dot{x}(0)t$

Comportement asymptotique

$$\ddot{z} = -g - \frac{1}{\tau}\,\dot{z}$$

Physiquement :

- v augmente sous l'effet de g
- plus v est grand, plus le frottement augmente
- il existe une vitesse limite

$$\ddot{z} = 0 \implies \dot{z}\big|_{limite} = -g\tau$$

Mouvement vertical

$$\ddot{z} = -g - \frac{1}{\tau}\,\dot{z}$$

$$\text{Changement de variable : } a = -g - \frac{1}{\tau}\dot{z} \rightarrow \ddot{z} = -\tau\dot{a} = a$$

$$\rightarrow a = C\,e^{-t/\tau} \rightarrow \dot{z} = -\tau g - \tau C\,e^{-t/\tau}$$

$$\rightarrow z = -\tau g t + D + \tau^2 C\,e^{-t/\tau}$$

$$\text{Conditions initiales : } z = \dot{z} = 0 \text{ à } t = 0 \implies C = -g \text{ et } D = \tau^2 g.$$

$$z = -\tau g t + \tau^2 g\big(1 - e^{-t/\tau}\big)$$

Trajectoire avec frottement

$$x = \dot{x}(0)\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$z = -\tau g t + \left(\tau^2 g + \tau \dot{z}(0)\right)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$