

# L'oscillateur harmonique amorti

**Mécanique, cours 5.3**

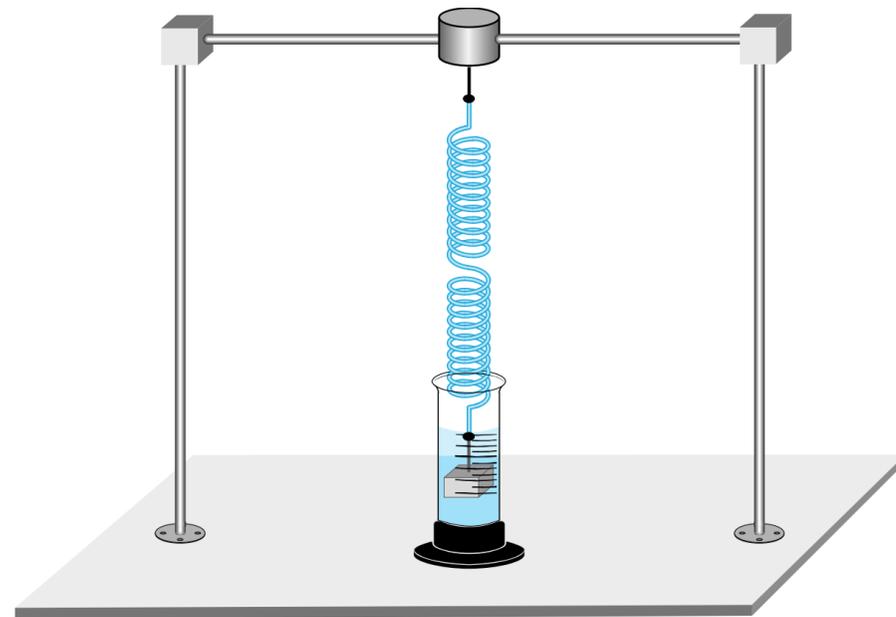
Jean-Philippe Ansermet

# L'oscillateur harmonique amorti

---

- Modèle de frottement
- Equation du mouvement
- Solution
- Méthode pour trouver la solution

# Oscillateur harmonique amorti



modèle de force :  $F_f = -bv$

cinématique :  $v_x = \dot{x}$

Equation du mouvement  $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$

Notation :  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$        $\frac{b}{2m} = \gamma$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Observation : beaucoup d'oscillations dans la décroissance

Frottements faibles

$$\text{Unités : } [\gamma^2] = [\omega_0^2]$$

$$\gamma^2 \ll \omega_0^2$$

# 1. Solution donnée, à vérifier

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\dot{x}(t) = -\gamma e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) - \omega_1 e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi)$$

$$\ddot{x}(t) = \gamma^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \gamma e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \gamma e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi) - \omega_1^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$2\gamma\dot{x}(t) = -2\gamma^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) - 2\omega_1 \gamma e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi)$$

$$\omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (\omega_0^2 - \gamma^2 - \omega_1^2) e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

# 2. Méthode générale

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Essai :  $x = e^{\lambda t}$

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2) = 0$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

## 2. Eq. horaire obtenue par une méthode générale

$$\lambda_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$
$$\lambda_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A e^{i\omega_1 t} + A^* e^{-i\omega_1 t})$$

## 2. Eq. horaire obtenue par une méthode générale

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A e^{i\omega_1 t} + A^* e^{-i\omega_1 t})$$

$$A = |A| e^{i\phi}$$

$$x(t) = |A| e^{-\gamma t} (e^{i\omega_1 t + i\phi} + e^{-i\omega_1 t - i\phi})$$

$$x(t) = 2|A| e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

# 1. Equation horaire fournie

$$x(t) = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

