ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Rotations

Mécanique, cours 8.1

Jean-Philippe Ansermet

Rotations

Rotations

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

- Evolution d’un repère
- Matrice
- Vitesse angulaire vectorielle
- Formules de Poisson

Evolution des vecteurs unités d'un repère

$$\left(A, \hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3\right) \qquad A \text{ fixe}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_1}{dt} = E_{21}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + E_{31}\hat{\boldsymbol{e}}_3 \qquad \text{(normal à } \hat{\boldsymbol{e}}_1\text{)}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} E_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j \qquad (\text{avec } E_{ii} = 0)$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k = \delta_{ik} \implies \frac{d}{dt}\left(\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k\right) = 0$$

$$0 = \sum_{j=1}^{3} E_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k + \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \sum_{j=1}^{3} E_{jk}\hat{\boldsymbol{e}}_j = E_{ki} + E_{ik}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & E_{12} & E_{13} \\ -E_{12} & 0 & E_{23} \\ -E_{13} & -E_{23} & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Une convention !

Définition : vecteur vitesse angulaire

Pour tout $\boldsymbol{r}$ fixé dans le repère :

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + r_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + r_3\hat{\boldsymbol{e}}_3\right) = \sum_i r_i \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt}$$

$$= \sum_i r_i \sum_j E_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j = \sum_j \left(\sum_i E_{ji}\, r_i\right)\hat{\boldsymbol{e}}_j$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3 r_2 + \omega_2 r_3 \\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ -\omega_2 r_1 + \omega_1 r_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

Propriété : formules de Poisson

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_i \qquad\qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$\boldsymbol{\omega}\ :\ \text{vitesse angulaire}$$