ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Vitesse angulaire

Mécanique, cours 8.2

Jean-Philippe Ansermet

Vitesse angulaire

Vitesse angulaire

- Formules de Poisson : rotation
- Le vecteur vitesse angulaire
  - sa direction
  - son module
- Applications

Les formules de Poisson décrivent une rotation

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_i \qquad (i = 1, 2, 3) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{\omega}$: vitesse angulaire

Pour tout $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{\omega}$ $\quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 0 \quad$ $\boldsymbol{\omega}$ définit une direction fixe

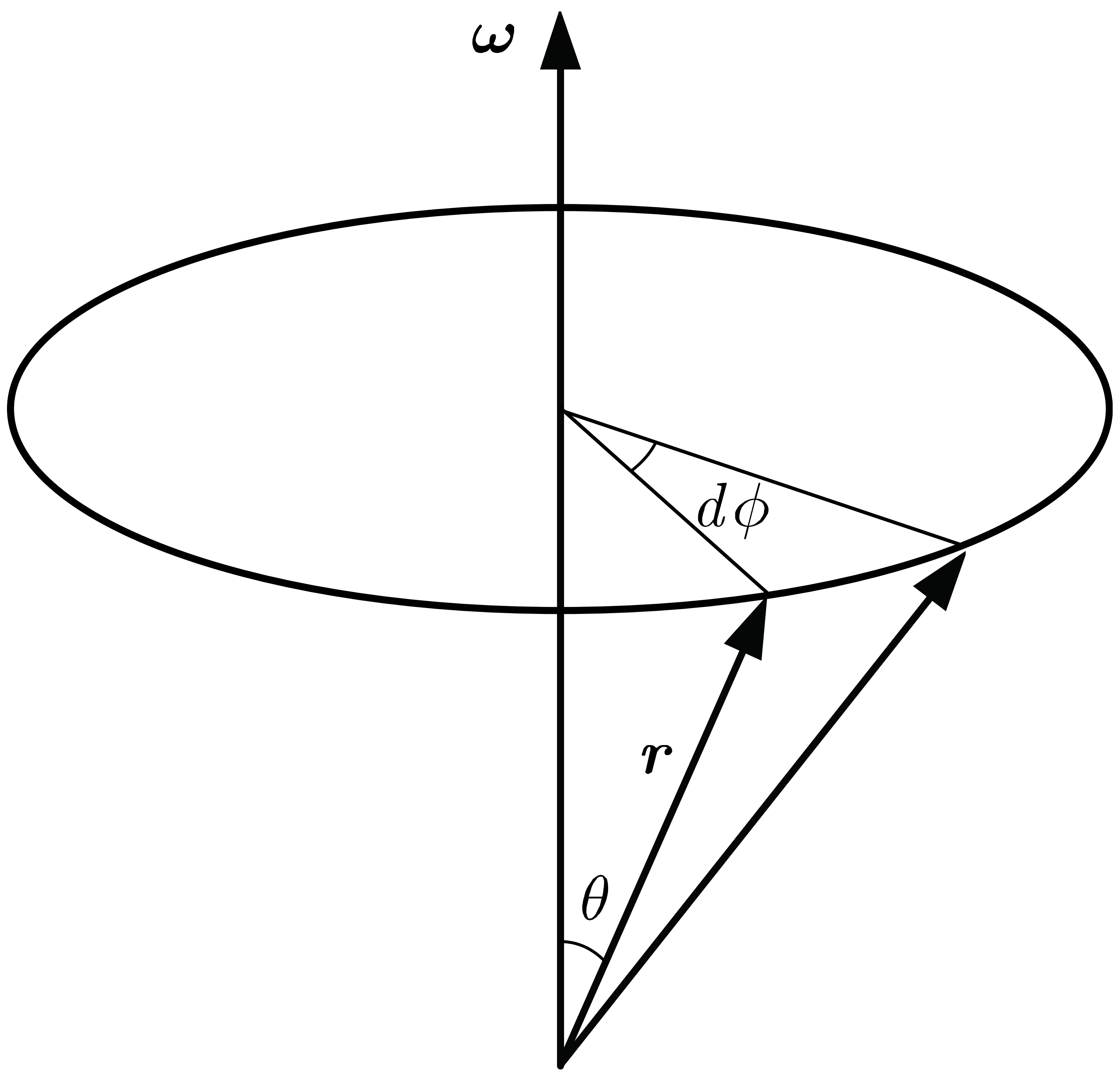
Les angles et les longueurs sont conservées

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2) = 0 \quad = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} \cdot \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} = \quad (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}_1) \cdot \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}_2)$$

$$= -(\boldsymbol{r}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}_2) = 0$$

L'évolution est caractéristique d'une rotation !

Module du vecteur de vitesse angulaire



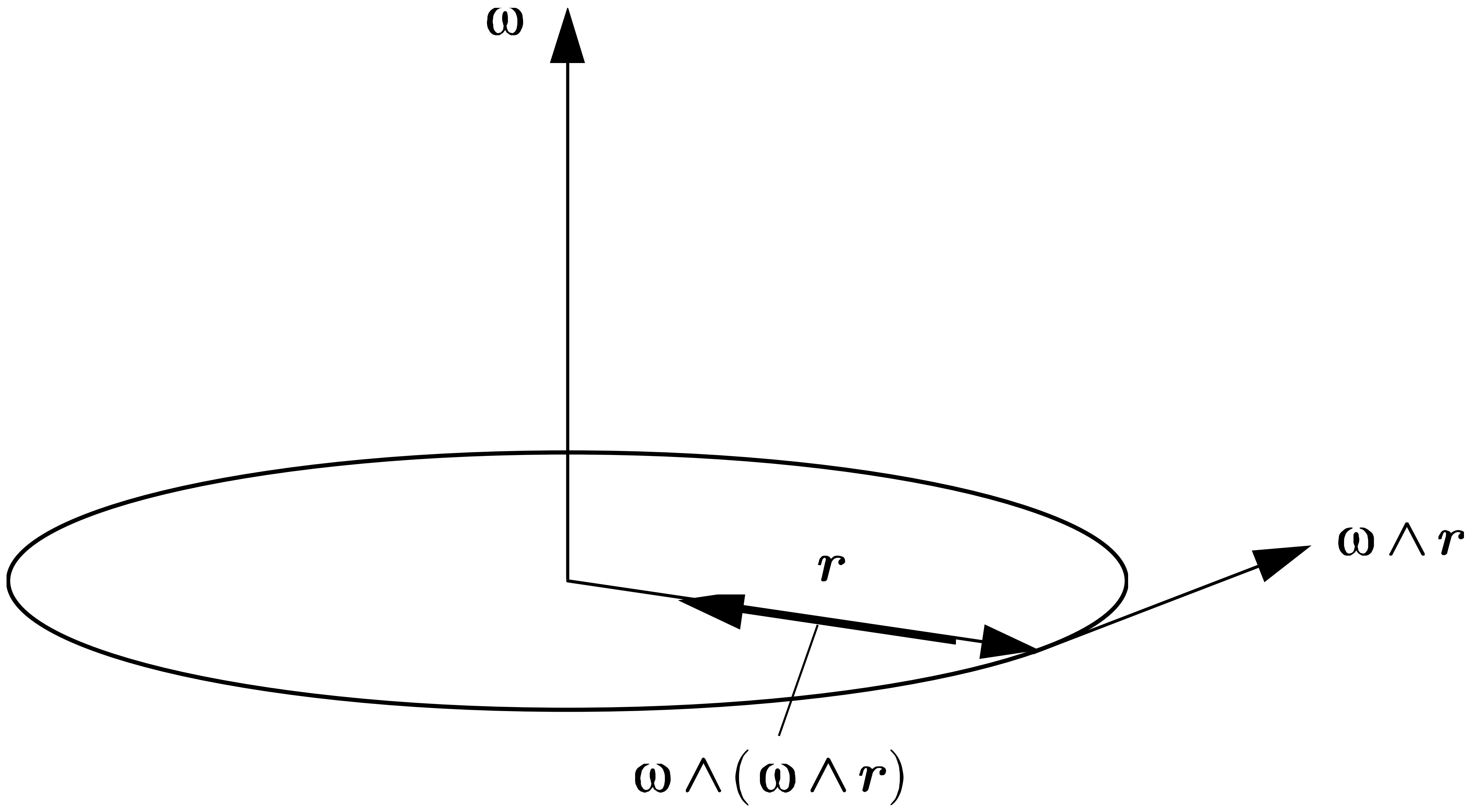
$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$$\left|\boldsymbol{r}(t+dt) - \boldsymbol{r}(t)\right| = |\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{\omega}|\,dt|\sin\theta|$$

$$\left|\boldsymbol{r}(t+dt) - \boldsymbol{r}(t)\right| = |\boldsymbol{r}|\,|d\phi||\sin\theta|$$

$$|\boldsymbol{\omega}| = \left|\frac{d\phi}{dt}\right| = |\dot{\phi}|$$

Application : mouvement circulaire uniforme

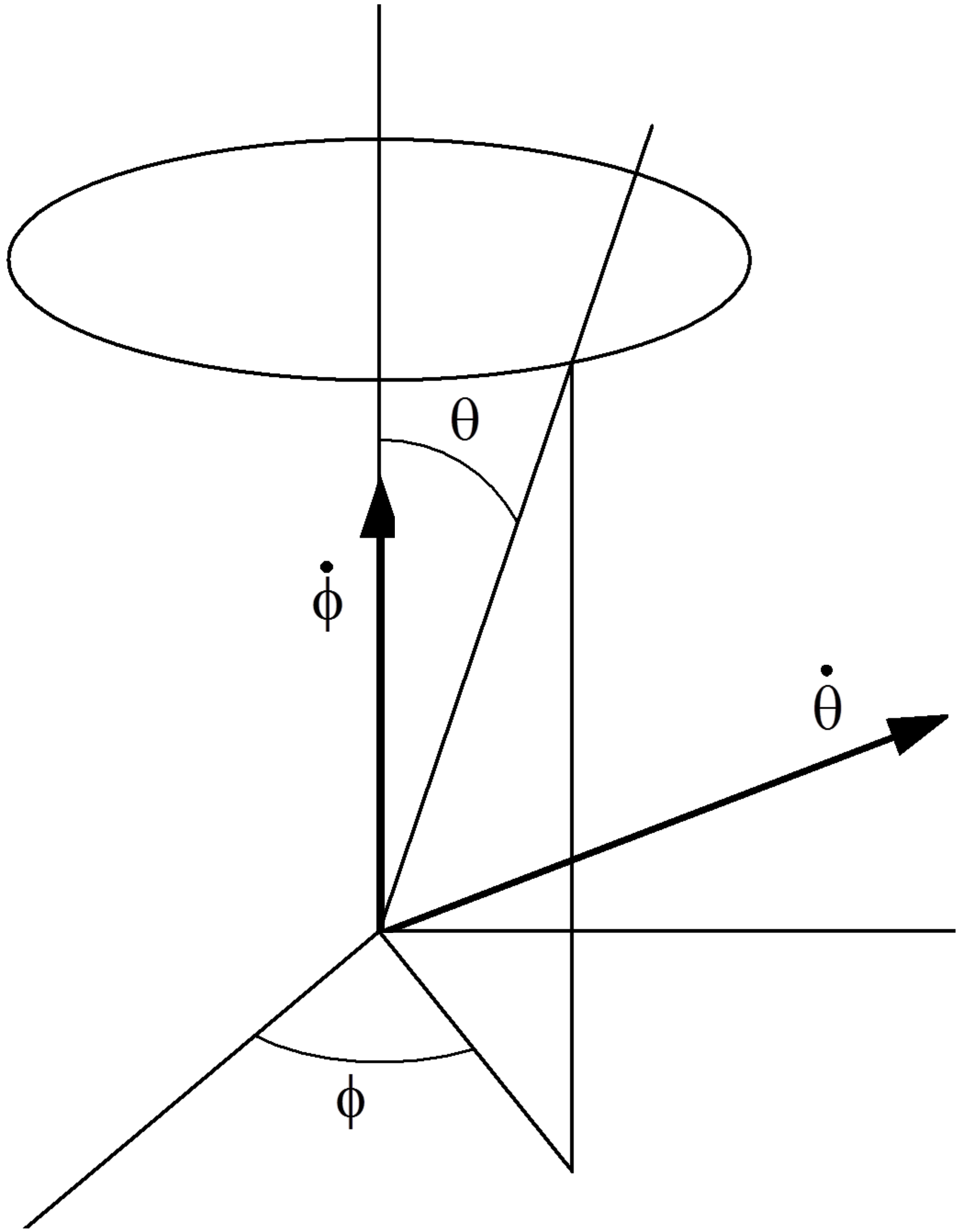


$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega} \wedge \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r})$$

$|\boldsymbol{\omega}| = \omega$ vitesse angulaire scalaire

Application : vitesses angulaires, c. sphériques



$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_r}{dt} = \dot{\boldsymbol{\phi}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_r + \dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_r$$

$$= \dot{\phi} \sin\theta \, \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \;\; + \dot{\theta} \, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta$$

Vitesse angulaire

- Le vecteur de vitesse angulaire est sur l'axe de rotation
- Son module est la vitesse angulaire scalaire
- Si on a plusieurs rotations, on somme les vitesses angulaires