ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Le pendule mathématique

Mécanique, cours 9.2

Jean-Philippe Ansermet

Le pendule mathématique

Le pendule mathématique

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

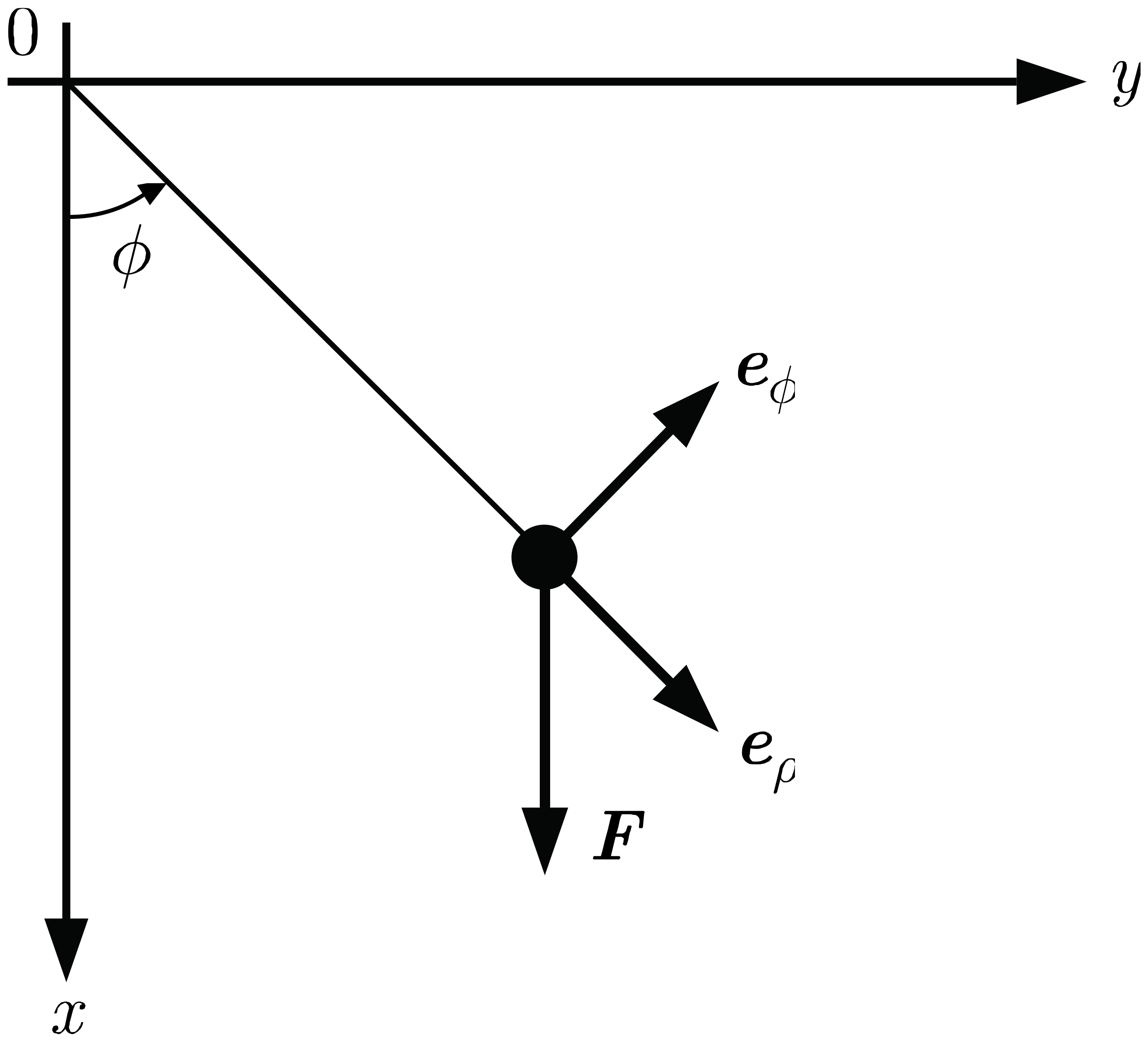
- Contrainte géométrique
- Marche à suivre
- Petites oscillations
- Méthode d'intégration

Définition : le pendule mathématique plan

Point matériel :

- pesant (sous l'effet de la pesanteur)
- astreint à se déplacer sur un cercle
- dans un plan vertical
- sans frottement

Référentiel, coordonnées, repère



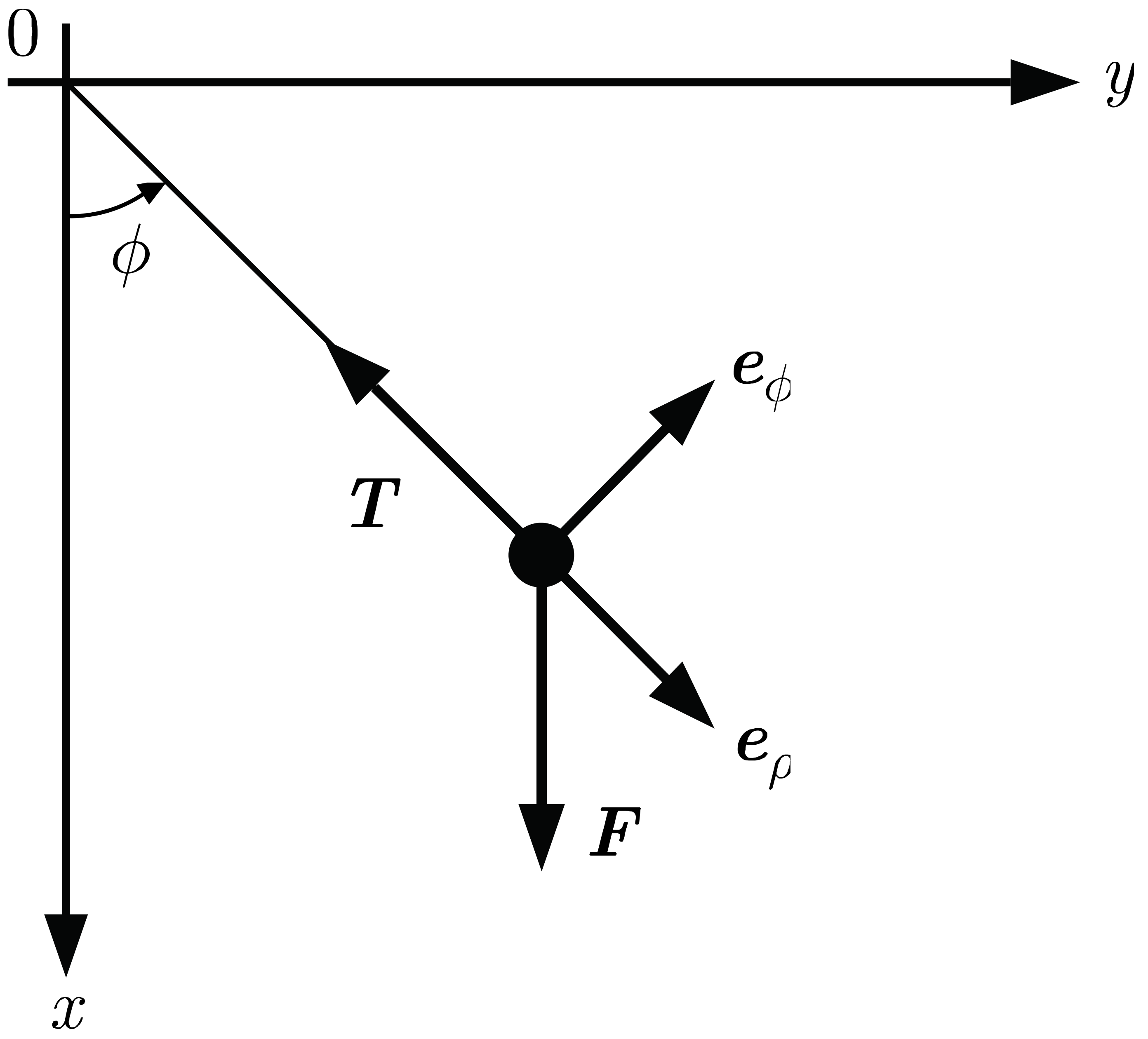
Coordonnées cylindriques :

$$(\rho, \phi, z)$$

Contraintes géométriques :

$$z = 0$$
$$\rho = \ell$$

Bilan des forces



- Pesanteur
- Force de liaison

$$\boldsymbol{T} = -T\boldsymbol{e}_\rho$$

$$\boldsymbol{F} = F\,(\cos\phi\,\boldsymbol{e}_\rho - \sin\phi\,\boldsymbol{e}_\phi)$$

Cinématique

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\, \boldsymbol{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\, \boldsymbol{e}_\phi + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z$$

Contraintes géométriques (liaisons)

$$\rho = \ell \implies \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$$

$$z = 0 \implies \dot{z} = \ddot{z} = 0$$

$$\boldsymbol{a} = \left(-\ell\dot{\phi}^2\right)\, \boldsymbol{e}_\rho + \left(\ell\ddot{\phi}\right) \boldsymbol{e}_\phi$$

Equation du mouvement

$$\text{Dynamique :}\ \boldsymbol{F} + \boldsymbol{T} = m\boldsymbol{a}$$

$$-m\ell\dot{\phi}^2 = F\cos\phi - T$$

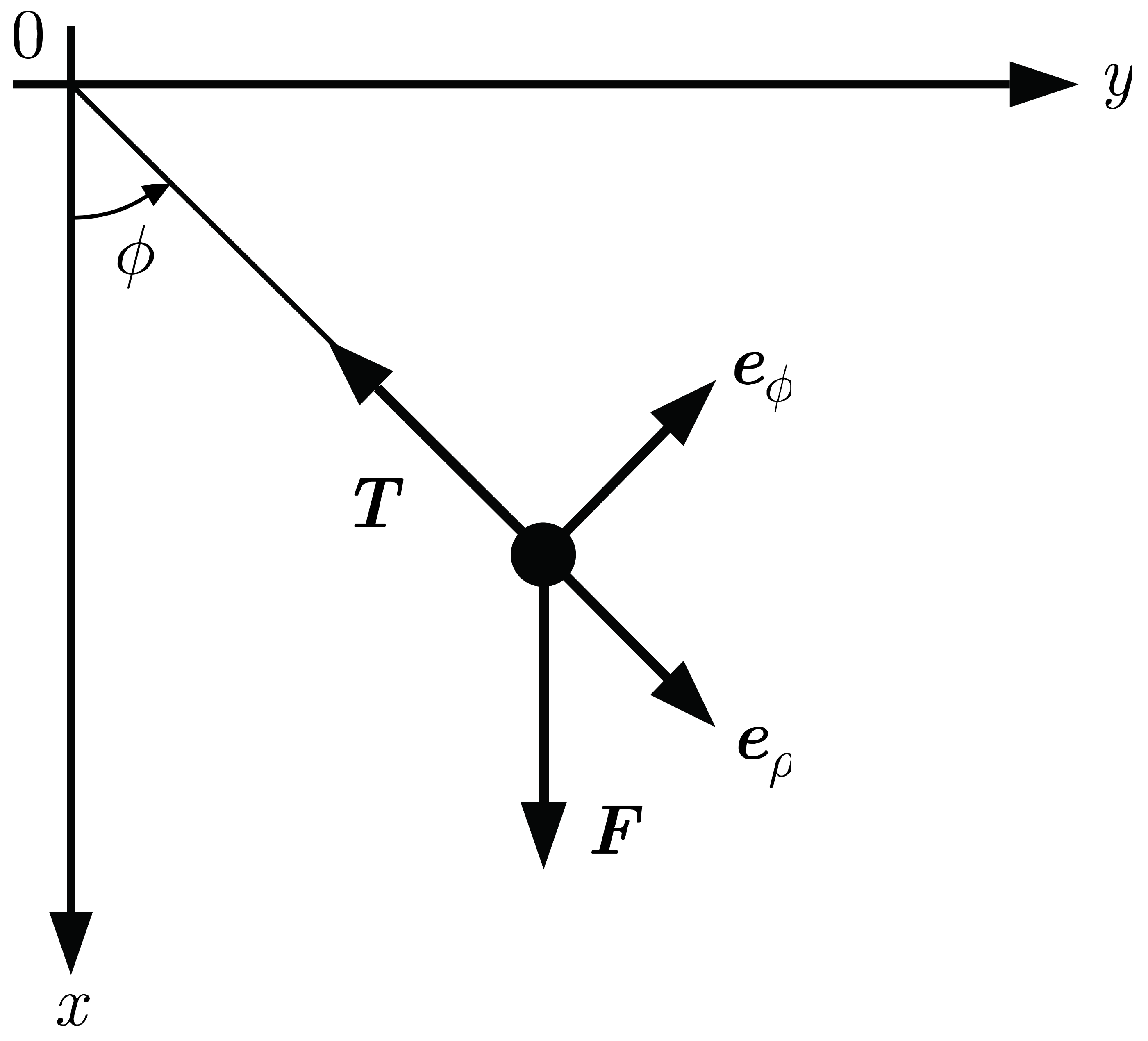
$$m\ell\ddot{\phi} = -F\sin\phi$$

détermine le mouvement

Remarque d'importance historique :
si le mouvement est indépendant de la masse, alors :

$$F = m\,g$$

Petites oscillations autour d’un équilibre



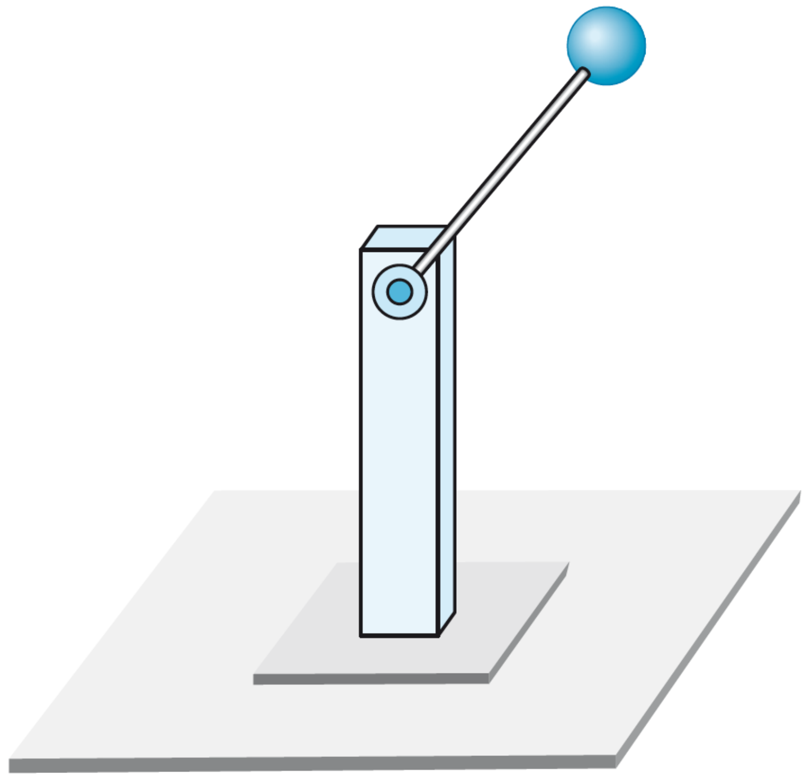
$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\,\sin\phi$$

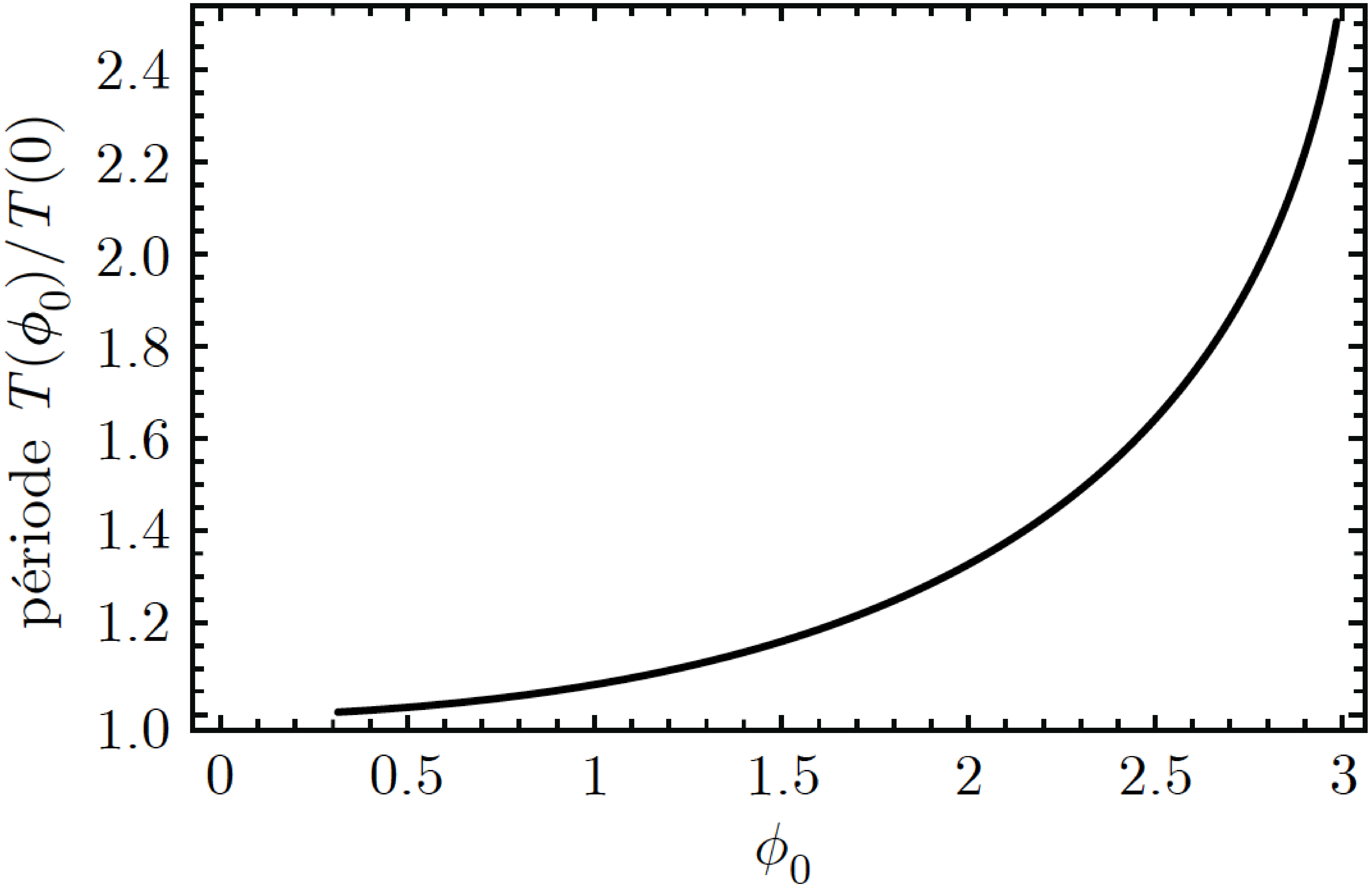
Petits angles : $\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\,\phi$

Oscillateur harmonique !

Pulsation : $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

Expérience





Intégration de l'équation du mouvement

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\,\sin\phi$$

$$\ddot{\phi}\,\dot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\,\sin\phi\,\dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{\ell}\,\cos\phi\right)$$

$$\frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell}\,\cos\phi = \text{constante}$$

$$\frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell}\,\cos\phi = -\frac{g}{\ell}\,\cos\phi_0$$

$$dt = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\,\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}}$$

Equation horaire inversée

$\phi(t)$

$$t = \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi'}{\sqrt{\cos\phi' - \cos\phi_0}}\left(\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\right)$$

Intégrale elliptique